Mathetreff: Lösungen zu den Knobelaufgaben für die Klassen 7 und 8
Mai-Juli 2004

Aufgabe 1

Die Analoguhr

(nach einer Einsendung von Alexander S. aus Bergisch-Gladbach)

Ein ganzer Kreis wird in 360 Grad unterteilt. Der Stundenzeiger rückt pro Stunde um 30° vor, pro Minute um ½ Grad, pro 10 Sekunden um den 6. Teil davon (0,0833°), pro Sekunde um den 10. Teil davon (0,00833°).Der Minutenzeiger legt pro Stunde die ganzen 360° zurück, pro 5 Minuten 30°, pro Minute 6°, pro 10 Sekunden 1°, pro Sekunde 0,1°.Die gesuchte Zeit liegt mit Sicherheit zwischen 8:40 Uhr und 8:45 Uhr (Minutenzeiger steht auf der Acht bzw. der Neun). 0° soll bei der Zwölf sein. Jetzt habe ich folgende Tabelle erstellt:

Uhrzeit	Stundenzeiger	Minutenzeiger
8:00	240°	0°
8:40	260°	240°
8:41	260,5°	246°
8:42	261°	252°
8:43	261,5°	258°
8:44	262°	264°
8:45	262,5°	270°

Also überholt (d.h. überdeckt) der Minutenzeiger den Stundenzeiger zwischen 8:43 Uhr und 8:44 Uhr. Mit der folgenden Tabelle und einem Taschenrechner kann ich das genauer einschränken:

Uhrzeit	Stundenzeiger	Minutenzeiger
8:43:00	261,50°	258°
8:43:10	261,5833°	259°
8:43:20	261,666°	260°
8:43:30	261,75°	261°
8:43:40	261,833°	262°
8:43:50	261,9166°	263°
8:44:00	262,5°	264°

Also überholt der Minutenzeiger den Stundenzeiger zwischen 8:43:30 Uhr und 8:43:40 Uhr. Das geht auch noch genauer:

Uhrzeit	Stundenzeiger	Minutenzeiger
8:43:30	261,75°	261°
8:43:35	261,79166°	261,5°
8:43:36	261,8	261,6°
8:43:37	261,80833°	261,7°
8:43:38	261,8166	261,8°
8:43:39	261,825	261,9°
8:43:40	261,833°	262°

Also überholt der Minutenzeiger den Stundenzeiger zwischen 8:43:38 Uhr und 8:43:39 Uhr.

Eine weitere Lösung:

Es gibt mehrere Lösungswege:
Der große Zeiger legt pro Minute 6° = 360°:60 zurück,

der kleine Zeiger 0,5° = (360° : 60):12. Der kleine Zeiger hat um 8.00 Uhr einen Vorsprung von 240°. Pro Minute verringert sich der Vorsprung des kleinen Zeigers um 5,5°.

Also: $240 : 5{,}5 = 43\frac{7}{11}$

Er holt ihn in $43\frac{7}{11}$ Minuten ein.
Andererseits kann man auch so vorgehen: x sei die gesuchte Minutenzahl. Es ergibt sich aus den Überlegungen zu a) folgende Gleichung:

$6\ x = 0{,}5° \cdot x + 240°$

Aufgabe 2

Zahlsysteme

(nach einem Vorschlag von Alexander S. aus Bergisch-Gladbach)

In der Index-Schreibweise lautet die Aufgabe: $(2709)_n = (1011321)_m$, gesucht sind n und m.
Dabei muss n mindestens 10 sein (wegen der Ziffer 9) und m mindestens 4 (wegen der Ziffer 3). Die vorderste Stelle der rechten Zahl wäre im 4er-System $1*4^6 = 4096$. Also muss n > 10 sein.
Ich berechne die rechte Zahl im 4er-System:
$(1011321)_4 = 1*4^6 + 1*4^4 + 1*4^3 + 3*4^2 + 2*4^1 + 1*4^0 = 4096 + 256 + 64 + 3*16 + 2*4 + 1 = 4473$.

$(2709)_n$ wäre im 11er-System etwas weniger als $3*11^3 = 3993$, also zuwenig. Im 12er-System wäre diese Zahl entsprechend etwas weniger als $3*12^3 = 5184$. Aber ca. 700 Unterschied sind ziemlich genau $5*12^2$, um die ich zu viel überschlagen habe. Genau ergibt sich:
$(2709)_{12} = 2*12^3 + 7*12^2 + 9*12^0 = 2*1728 + 7*144 + 9 = 4473$.
Also ist: n=12 und m=4.

Eine weitere Lösung:

Zahlensystem	4	5	6	7	8	9
Zahl						
1	1	1	1	1	1	1
0	4	5	6	7	8	9
1	17	26	37	50	65	82
1	69	131	223	351	521	739
3	279	658	1341	2460	4171	6654
2	1118	3292	8048	17222	33370	59888
1	4473	16461	48289	120555	266961	538993

Zahlensystem	10	11	12	13	14	15
Zahl						
2	2	2	2	2	2	2
7	27	29	31	33	35	37
0	270	319	372	429	490	555
9	2709	3518	4473	5586	6869	8334

Die 1011321 hat im 4er-System den dekadischen Wert 4473, genau wie die 2709 im 1:

Aufgabe 3

Fußballtoto

a) Da es für jedes der 11 Spiele 3 Möglichkeiten gibt, gibt es insgesamt 3^{11} Möglichkeiten für eine Tippreihe. Nun ist $3^{11} = 177147$. Es gibt also 177147 Möglichkeiten für eine Tippreihe.

b) Es gibt genau eine Möglichkeit, dass alle Angaben richtig sind. Also sind mit der Wahrscheinlichkeit von 1/177147 alle Angaben richtig. Das sind ca. 0,0005645 %.

c) Da es für jedes der 11 Spiele 2 falsche Möglichkeiten gibt, gibt es insgesamt 2^{11} Möglichkeiten, dass alle Angaben falsch sind. Es ist $2^{11} = 2048$. Es gibt folglich 2048 Möglichkeiten, dass alle Angaben falsch sind. Also sind mit der Wahrscheinlichkeit von 2048/177147 alle Angaben falsch. Das sind ca. 1,1561019 %,