Mathetreff der Bezirksregierung Düsseldorf
Knobelaufgaben der Stufen 9, 10, Mai/ Juli 2004
Wilko_Rautenberg@yahoo.de, 13.06.2004

Aufgabe 1

Ein Bauer hinterlässt seinen 2 Söhnen eine Schafherde. Die Brüder lassen die Herde verkaufen, wobei jedes Schaf soviel Euro einbringen soll, wie die Herde Schafe hat. Sie erhalten einen Erlös mit lauter 10-Euro Scheinen und einen Rest Kleingeld.
Nachdem die Brüder die Scheine gleichmäßig geteilt hatten, blieben ein Schein und das Kleingeld übrig. Der ältere Bruder machte dem Jüngeren nun folgenden Vorschlag: Ich behalte den 10-Euro Schein, du erhälst das Kleingeld und ein von mir gestern gekauftes Taschenmesser. Dann haben wir beide gleich viel bekommen. Wie teuer war das Taschenmesser?

Lösung

Die Anzahl der Schafe sei $n \in \mathbb{N}$. Da jedes Schaf so viel Euro erbringen soll, wie die Herde Schafe hat, beträgt der Erlös n^2. Andererseits beträgt der Erlös gemäß Aufgabe $n^2 = m \cdot 10 + y$ mit $m, y \in \mathbb{N}$ ($y \in \mathbb{N}$ wegen $n^2 \in \mathbb{N}$ und $y > 0$ gemäß Aufgabe). Nun ist m ungerade, weil nach dem Verteilen der 10-Euro Scheine einer übrig bleibt, also $m = 2k+1, k \in \mathbb{N}$. Damit haben wir

$$n^2 = (2k+1) \cdot 10 + y \qquad (*)$$

Der Preis des Taschenmessers sei T. Nach der vorgenommenen Aufteilung hat der erste Bruder $k \cdot 10 + 10 - T$, der andere $k \cdot 10 + y + T$. Dann gilt $k \cdot 10 + 10 - T = k \cdot 10 + y + T$, also $10 = y + 2T \Rightarrow y = 10 - 2T < 10$. Also ist y eine Ziffer 1, 2, ..., 9.

Da y Endziffer einer natürlichen Quadratzahl ist, folgt $y \neq 2, 3, 7, 8$. Mögliche Werte für y und der jeweils zugehörige Preis des Taschenmessers sind

y	1	4	5	6	9
T=(10-y)/2	4,5	3	2,5	2	0,5

Angenommen, mit einem $x \in \mathbb{N}$ gilt jeweils:

$n = 10x + 0 \Rightarrow \quad n^2 = 100x^2 \Rightarrow y = 0$ Widerspruch zu $y \in \mathbb{N}$

$n = 10x + 1 \Rightarrow \quad n^2 = 100x^2 + 20x + 1 = \underbrace{(10x^2 + 2x)}_{\text{gerade}} \cdot 10 + 1$ Widerspruch zu (*)

$n = 10x + 2 \Rightarrow \quad n^2 = 100x^2 + 40x + 4 = \underbrace{(10x^2 + 4x)}_{\text{gerade}} \cdot 10 + 4$ Widerspruch zu (*)

$n = 10x + 3 \Rightarrow \quad n^2 = 100x^2 + 60x + 9 = \underbrace{(10x^2 + 6x)}_{\text{gerade}} \cdot 10 + 9$ Widerspruch zu (*)

$n = 10x + 4 \Rightarrow \quad n^2 = 100x^2 + 80x + 16 = \underbrace{(10x^2 + 8x + 1)}_{\text{ungerade}} \cdot 10 + 6 \quad \Rightarrow \quad y = 6$

$n = 10x + 5 \Rightarrow \quad n^2 = 100x^2 + 100x + 25 = \underbrace{(10x^2 + 10x + 2)}_{\text{gerade}} \cdot 10 + 5$ Widerspruch zu (*)

$n = 10x + 6 \Rightarrow \quad n^2 = 100x^2 + 120x + 36 = \underbrace{(10x^2 + 12x + 3)}_{\text{ungerade}} \cdot 10 + 6 \quad \Rightarrow \quad y = 6$

$n = 10x + 7 \Rightarrow \quad n^2 = 100x^2 + 140x + 49 = \underbrace{(10x^2 + 14x + 4)}_{\text{gerade}} \cdot 10 + 9$ Widerspruch zu (*)

$n = 10x + 8 \Rightarrow \quad n^2 = 100x^2 + 160x + 64 = \underbrace{(10x^2 + 16x + 6)}_{\text{gerade}} \cdot 10 + 4$ Widerspruch zu (*)

$n = 10x + 9 \Rightarrow \quad n^2 = 100x^2 + 180x + 81 = \underbrace{(10x^2 + 18x + 8)}_{\text{gerade}} \cdot 10 + 1$ Widerspruch zu (*)

Unter den gegebenen Voraussetzungen ist die einzige Möglichkeit y = 6; n lässt sich allerdings nicht bestimmen. Jedenfalls muss gemäß unserer Tabelle T = 2€ gelten.

Aufgabe 2

In einer Reihe von Zahlen ist jede Zahl, abgesehen von den ersten beiden gleich der Summe der beiden Zahlen davor. Wenn die erste Zahl Eins heißt, und die zehnte Zahl 111, wie groß ist dann die zweite Zahl? Bestimme die Zahl genau, Näherungswerte sind nicht zulässig.
Schaffe dir eine eigene ähnlich geartete Reihe von 10 Zahlen.
Bestimme die Summe deiner Zahlen, wenn die beiden ersten ganzzahlig sind.
Multipliziere die 7.Zahl mit 11 und vergleiche die Ergebnisse.
Beweise, dass deine Vermutung immer zutrifft.

<u>Lösung</u>

a) Mit $q \in \mathbb{R}$ lautet die Zahlenreihe:

1, q, 1+q, 1+2q, 2+3q, 3+5q, 5+8q, 8+13q, 13+21q, 111

Daraus folgt $111 = 8+13q+13+21q = 21+34q \quad \Rightarrow \quad 34q = 90 \quad \Rightarrow \quad q = \frac{45}{17}$

b) Wir wählen die Zahlenreihe:

1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123

Die Summe beträgt 319.
Die siebte Zahl ist 29, und wir haben $11 \cdot 29 = 319$. Die Vermutung lautet:

In einer Reihe von Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_{10} \in \mathbb{R}$,

für die $a_k = a_{k-2} + a_{k-1} \quad (k = 3, 4, \ldots, 10)$ gilt, ist

$$\sum_{k=1}^{10} a_k = 11 \cdot a_7$$

Beweis:

Wir haben

$$\begin{aligned}
a_1 &= a_1\\
a_2 &= a_2\\
a_3 &= a_2 + a_1\\
a_4 &= a_2 + a_3 = 2a_2 + a_1\\
a_5 &= a_3 + a_4 = 3a_2 + 2a_1\\
a_6 &= a_4 + a_5 = 5a_2 + 3a_1\\
a_7 &= a_5 + a_6 = 8a_2 + 5a_1\\
a_8 &= a_6 + a_7 = 13a_2 + 8a_1\\
a_9 &= a_7 + a_8 = 21a_2 + 13a_1\\
a_{10} &= a_8 + a_9 = 34a_2 + 21a_1
\end{aligned}$$

$$\sum = 88 \cdot a_2 + 55 \cdot a_1 = 11 \cdot (8a_2 + 5a_1) = 11 \cdot a_7$$

q.e.d.

Aufgabe 3

Der achte Teil einer Herde Affen, ins Quadrat erhoben, hüpfte in einem Haine umher und erfreute sich an dem Spiele, die 12 übrigen sah man auf einem Hügel miteinander schwatzen.
Wie stark war die Herde?
(Nach Atscharja Bhaskara, indischer Mathematiker (1114-1185))

<u>Lösung</u>

Sei x die Anzahl der Affen. Dann ist gemäß der Aufgabenstellung

$$x = \left(\frac{x}{8}\right)^2 + 12 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 64x + 768 = 0$$

Mit der p-q-Formel folgt

$$x_1 = 32 + \sqrt{-768 + 1024} = 32 + \sqrt{256} = 32 + 16 = 48$$
$$x_2 = 32 - \sqrt{-768 + 1024} = 32 - \sqrt{256} = 32 - 16 = 16$$

Die Anzahl der Affen ist nicht eindeutig zu bestimmen, da sowohl x_1 als auch x_2 die Aufgabe lösen. Ohne weitere Angaben ist die Aufgabe unlösbar.