

**Mathetreff: Lösungen zu den Knobelaufgaben für die Klassen 9 und 10**  
**Januar-Februar 2004**



### Aufgabe 1

#### Bänder

Führt man  $n$  Halbdrehungen vor dem Verkleben durch, so ergibt sich für  $t$  Teile:

- Ist  $n$  gerade, gibt es  $t$  Bänder mit  $n$  Halbdrehungen.
- Ist  $n$  ungerade und  $t$  gerade, dann erhält man  $t/2$  doppelt so lange Bänder mit  $2n+2$  Halbdrehungen.
- Ist  $n$  ungerade und  $t$  ungerade, dann erhält man  $(t-1)/2$  doppelt so lange Bänder mit  $2n+2$  Halbdrehungen und ein Original.

180°-Bänder heißen Möbiusbänder.

*Torus*: Es wird die obere Seite eines Rechtecks mit der unteren und die rechte mit der linken Seite verklebt. Ein Torus hat das Aussehen eines Rettungsringes.

*Klein'sche Flasche*: Es wird die rechte Seite eines Rechtecks mit der linken Seite normal verklebt und die obere mit der unteren nach einer Drehung.

*Kreuzhaube*: Wenn bei der Klein'schen Flasche sowohl oben und unten als auch links und rechts vor dem Verkleben verdreht werden, ergibt es eine Kreuzhaube.

### Aufgabe 2

#### Potenzen

Die Differenzen sind alle von der Form  $(n+1)^3 - n^3$ .

Es ist

$$(n+1)^3 - n^3 = (n^2 + 2n + 1)(n+1) - n^3 = n^3 + 2n^2 + n + n^2 + 2n + 1 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1 = 3n(n+1) + 1$$

Ist nun  $n$  gerade, so ist  $3n$  durch 3 und durch 2 teilbar.

Ist  $n$  ungerade, so ist  $3(n+1)$  durch 3 und durch 2 teilbar.

In beiden Fällen ist also  $3n(n+1)$  durch 6 teilbar.

Also lässt  $(n+1)^3 - n^3 = 3n(n+1) + 1$  bei der Teilung durch 6 den Rest 1.

### Aufgabe 3

#### Kaffee oder Milch?

Am Ende befinden sich in den beiden Tassen die gleiche Flüssigkeitsmenge wie zu Beginn.

Daher fehlt Max am Ende gegenüber dem Anfangszustand in seiner Tasse genau soviel Kaffee, wie er Milch in der Tasse hat, und genau diese Menge Kaffee muss Maria in der Tasse haben. Er hat also genau soviel Milch in der Tasse wie Maria Kaffee hat.

Also hat Max unrecht!