

Mathetreff: Lösungen zu den Knobelaufgaben für die Klassen 7 und 8
März-April 2004



Alexander Sch. (Stufe 5) aus Bergisch-Gladbach:

Aufgabe 1

Insgesamt sind es 21 Eier, also bekommt jedes Kind 7 Eier.

Insgesamt sind es aber auch $10 \frac{1}{2}$ Portionen Schokolade, also muss jedes Kind $3 \frac{1}{2}$ Portionen bekommen.

Es geht nicht, dass ein Kind kein „ganzes“ (ganz gefülltes) Ei bekommt, weil dann ein anderes Kind mindestens 4 bekommen würde, das ist mehr als $3 \frac{1}{2}$ Portionen. Also bekommt das erste Kind 1, 2 oder 3 „ganze“ Eier.

Insgesamt finde ich dann 6 Möglichkeiten, die ich in einer Tabelle aufgeschrieben habe. Die erste Zahl ist die Anzahl der „ganzen“ Eier, die zweite Zahl ist die Anzahl der „halben“ (halb gefüllten) Eier, die dritte Zahl ist die Anzahl der „leeren“ (ungefüllten) Eier.

Möglichkeit Nr.	Kind 1	Kind 2	Kind 3
1	1, 5, 1	3, 1, 3	3, 1, 3
2	2, 3, 2	2, 3, 2	3, 1, 3
3	2, 3, 2	3, 1, 3	2, 3, 2
4	3, 1, 3	2, 3, 2	2, 3, 2
5	3, 1, 3	3, 1, 3	1, 5, 1
6	3, 1, 3	1, 5, 1	3, 1, 3

Die Möglichkeiten Nr. 1, 5 und 6 sind Vertauschungen der gleichen Eier-Portionen (zweimal 3, 1, 3 und einmal 1, 5, 1). Genauso die Möglichkeiten 2, 3 und 4 (einmal 3, 1, 3 und zweimal 2, 3, 2).

Aufgabe 2

Identisch mit 5/6-Aufgabe 3:

Daniela, Julia und Leonie aus Duisburg schrieben unter anderem:

X kann 1,2,3,4,5,6,7,8 und 9 sein.

$$(11)=1+(10)^1=1+10=11$$

$$(22)=2+(20)^1=2+20=22$$

$$(33)=3+(30)^1=3+30=33$$

$$(44)=4+(40)^1=4+40=44$$

$$(55)=5+(50)^1=5+50=55$$

$$(66)=6+(60)^1=6+60=66$$

$$(77)=7+(70)^1=7+70=77$$

$$(88)=8+(80)^1=8+80=88$$

$$(99)=9+(90)^1=9+90=99$$

$$(111)=(11)+(10)^2=11+10*10=111$$

Bei 2,3,4,5,6,7,8 und 9

geht es nicht da man z.B. bei zwei nicht auf zweihundert kommt, bei drei nicht auf dreihundert, bei vier nicht auf vierhundert...

$$(1111)=(111)+(10)^3=111+10*10*10=1111$$

Nun gilt das gleiche wie bei der vorigen Aufgabe.

$$(11111)=(1111)+(10)^4=1111+10*10*10*10=11111$$

Nun gilt wieder das gleiche wie oben.

$$(111111)=(11111)+(10)^5=11111+10*10*10*10*10=111111$$

Nun gilt wieder das obige.

Wenn alle fünf Gleichungen gleichzeitig stimmen sollen, dann ist $X=1$, $Y=0$, $m=1$, $a=2$, $t=3$, $h=4$, $e=5$.

Michael Sch. aus Karlsruhe schrieb:

$$x \times 10 + x = x + (x \times 10 + y \times 1)^m \quad | - x$$

$$x \times 10 = (x \times 10 + y)^m$$

$$(x \times 10 + y)^m \text{ muss durch } 10 \text{ teilbar sein.} \quad \Rightarrow y = 0$$

$$x \times 10 = (x \times 10)^m \quad \Rightarrow m = 1$$

$$x \times 100 + x \times 10 + x = x \times 10 + x + (x \times 10)^a \quad | - (x \times 11)$$

$$x \times 100 = (x \times 10)^a \quad \Rightarrow x = 1 \quad a = 2$$

$$1111 = 111 + 10^t \quad | - 111$$

$$1000 = 10^t \quad \Rightarrow t = 3$$

$$11111 = 1111 + 10^h \quad | - 1111$$

$$10000 = 10^h \quad \Rightarrow h = 4$$

$$111111 = 11111 + 10^e \quad | - 11111$$

$$100000 = 10^e \quad \Rightarrow e = 5$$

$$11 = 1 + 10^1$$

$$111 = 11 + 10^2$$

$$1111 = 111 + 10^3$$

$$11111 = 1111 + 10^4$$

$$111111 = 11111 + 10^5$$

Aufgabe 3

Alexander Sch.(Stufe 5) aus Bergisch-Gladbach schrieb:

Ich habe diese Aufgabe mit dem Tabellenkalkulationsprogramm („works“) von unserem PC bearbeitet.

In den linken 4 Spalten stehen die Werte für w, x, y und z.

Dabei habe ich für w die Ziffern 0 bis 9 fest vorgegeben. Dann wird das Produkt auf der rechten Seite von Aufgabe (a) gleich Null, also muss dann auch z=0 sein. x und y sind dann beliebig.

Für x, y und z kann ich die Ziffern in der ersten Zeile variieren, in den anderen Zeilen werden sie automatisch angeglichen, so dass auf einen Schlag immer alle w's ausprobiert werden.

In der 5., 6. und 7. Spalte stehen die drei verschiedenen Produkte, die in den Aufgaben vorkommen. Sie werden so berechnet:

Die Zahl „wxy“ ist $(100*w + 10*x + y)$, für die Zahl xyz gilt das Entsprechende. Dann ist z.B. der Ausdruck „wxy*z“ gleich $(100*w + 10*x + y)*z$.

Damit ich nicht immer mit dem Auge vergleichen muss, ob in zwei Spalten gleiche Ergebnisse stehen, habe ich mir mit einer Logik-Funktion („wenn (Wert1=Wert2; dann 1; sonst 0)“) des Programms geholfen und die drei rechten Spalten gemacht. Wenn in der Spalte 5-7 zwei Werte gleich sind, dann habe ich nämlich eine Lösung für Aufgabe a, b oder c gefunden. Dann trägt das Programm dort eine „1“ ein, sonst eine „0“.

Jetzt musste ich „von hinten“ anfangen und in den Spalten für x, y und z „zusammengelesen“ die „Zahlen“ bis 999 eingeben und die Lösungen ausschreiben. Vielleicht geht das auch automatisch, aber das habe ich noch nicht herausgefunden.

Ich setzte hier eine Beispiel-Tabelle ein:

w	x	y	z	1. Produkt wxy*z	2. Produkt w*xyz	3. Produkt wx*yz	Aufgabe (a)	Aufgabe (b)
0	0	0	0	0	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0	1	1
2	0	0	0	0	0	0	1	1
3	0	0	0	0	0	0	1	1
4	0	0	0	0	0	0	1	1
5	0	0	0	0	0	0	1	1
6	0	0	0	0	0	0	1	1
7	0	0	0	0	0	0	1	1
8	0	0	0	0	0	0	1	1
9	0	0	0	0	0	0	1	1
0 bis 9	0 bis 9	0 bis 9	0 bis 9	$= (100*w + 10*x + y) * z$ wird berechnet	$= w * (100*x + 10*y + z)$ wird berechnet	$= (10*w + x) * (10*y + z)$ wird berechnet	wenn (1.Prod.= 2.Prod.; dann 1; sonst 0)	wenn (3.P 2.Prod.; dann 1; sc
				diese Werte müssen	für (a) gleich sein			
				diese Werte müssen		für (b) gleich sein		
				diese Werte müssen	für (c) gleich sein			

Folgende Lösungen habe ich gefunden:

(a) Für die Aufgabe: $wxy * z = w * xyz$

Nr. der Lösung	W	x	y	z	Produkt
1	0 bis 9	0	0	0	0
2	0	0	0	1 bis 9	0
3	0	0	1 bis 9	0	0
4	0	1 bis 9	0 bis 9	0	0
5	1	1	1	1	111
6	2	2	2	2	444
7	3	3	3	3	999
8	4	4	4	4	1776
9	5	5	5	5	2775
10	6	6	6	6	3996
11	7	7	7	7	5439
12	8	8	8	8	7108
13	9	9	9	9	8991
14	1	6	6	4	664
15	2	6	6	5	1330
16	4	8	4	7	3388
17	1	9	9	5	995
18	4	9	9	8	3992

Die Lösungen Nr. 1-4 und 5-13 ergeben sich auch durch Anschauen. Bei Nr. 14-18 ist keine Lösung dabei, die lauter verschiedene Ziffern hat.

(b) Für die Aufgabe: $wx * yz = w * xyz$

Nr. der Lösung	W	x	Y	z	Produkt
1	0 bis 9	0	0	0	0
2	0	0	0	1 bis 9	0
3	0	0	0 bis 9	0 bis 9	0
4	0	1 bis 9	0	0	0
5	1	1	1	0	110
6	2	2	2	0	440
7	3	3	3	0	990
8	4	4	4	0	1760
9	5	5	5	0	2750
10	6	6	6	0	3960
11	7	7	7	0	5390
12	8	8	8	0	7040
13	9	9	9	0	8910
14	1	3	2	5	325
15	8	3	3	2	2656
16	1	6	4	0	640
17	2	6	5	0	1300
18	2	7	5	6	1512
19	1	9	5	0	950

20	3	9	7	5	2925
21	4	9	8	0	3920

Die Lösungen Nr. 1-4 und 5-13 ergeben sich auch durch Anschauen. Bei den acht Lösungen Nr. 14-21 haben sieben Lösungen lauter verschiedene Ziffern.

(c) Für die Aufgabe: $wx \cdot yz = wxy \cdot z$

Nr. der Lösung	w	x	y	z	Produkt
1	0 bis 9	0 bis 9	0	0	0
2	0	0	0	1 bis 9	0
3	0	0	1 bis 9	0	0
4	0	1	1	1	11
5	0	2	2	2	44
6	0	3	3	3	99
7	0	4	4	4	176
8	0	5	5	5	275
9	0	6	6	6	396
10	0	7	7	7	5390
11	0	8	8	8	704
12	0	9	9	9	891
13	0	1	6	4	64
14	0	1	9	5	95
15	0	2	6	5	130
16	0	4	9	8	392

Die Lösungen Nr. 1-3 und 4-12 ergeben sich auch durch Anschauen. Die vier Lösungen Nr. 13-16 haben alle lauter verschiedene Ziffern und haben immer $w=0$.

Anmerkungen zu a):

Natürlich sind dies bequeme Wege der Lösungssuche (und nicht nur für Teilaufgabe c) auch sinnvoll). Es sollte aber auch kurz auf andere Ideen hingewiesen werden. Im Folgenden soll das Zeichen $\overline{abc} = 100a + 10b + c$ für Dezimalzahlen stehen.

Sogenannte triviale Lösungen bieten sich an für $w=x=y=z$. Ziffern mit größten Stellenwert einer Zahl sollten sinnvoll größer 0 gewählt werden; das schränkt die Lösungsvielfalt ein – falls jemand die Aufgabe umfassender lösen will.

$$\overline{wxy} \cdot z = w \cdot \overline{xyz} \Leftrightarrow (100 \cdot w + \overline{xy}) \cdot z = w \cdot (\overline{xy} + z) \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow 99 \cdot w \cdot z = \overline{xy} \cdot (10 \cdot w - z) \quad (*);$$

11 ist also Teiler von \overline{xy} oder von $(10 \cdot w - z)$.

a1) Annahme: 11 ist Teiler von \overline{xy} ; d.h. $\overline{xy} \in \{99, 88, 77, 66, 55, 44, 33, 22, 11\}$.

Wenn $\overline{xy} = 99$ gilt, dann ist nach (*) $w \cdot z = 10 \cdot w \Leftrightarrow (w + 1) = 10 \cdot w \Leftrightarrow z = \frac{10 \cdot w}{w + 1}$.

Nach Einsetzen von einstelligem Zahlen für w finden wir nur für $w = 1 \rightarrow z = 5$ bzw. $w = 4 \rightarrow z = 8$ bzw. $w = 9 \rightarrow z = 9$ eine natürliche Zahl für z . Das führt zu drei Lösungen: $199 \cdot 5 = 1 \cdot 995$ und $499 \cdot 8 = 4 \cdot 998$ und zur trivialen Lösung $w=x=y=z=9$. Wenn $\overline{xy} = 88$

gilt, dann auch nach (*) $99 \cdot w \cdot z = 88 \cdot (10 \cdot w - z) \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow z = \frac{80 \cdot w}{9 \cdot w + 8}$

Nach einsetzen von einstelligem Zahlen für w ergibt sich nur die triviale Lösung für $w=x=y=z=8$. usw. bis $\overline{xy} = 11$. Es ergeben sich mehr als nur die trivialen Lösungen!

a2) Annahme: 11 ist Teiler von $(10w-z)$, dann kann $\overline{xy} = 99 \cdot w \cdot z : (10 \cdot w - z)$ aus obiger Gleichung ermittelt werden. Lösungen ergeben sich schrittweise mit

w	z	$99wz:(10w-z)$	Wert	brauchbar?	Lösungen
2	9	1782:11	162		
3	8	2376:22	108		
4	7	2772:33	84	Ja	$484 \cdot 7 = 4 \cdot 847$
5	6	2970:44	67,5	Nein	
6	5	2790:55	54	Ja	$654 \cdot 5 = 6 \cdot 545$
7	4	2772:66	42	Ja	$742 \cdot 4 = 7 \cdot 424$
8	3	2376:77	30,...	Nein	
9	2	1782:88	20,25	Nein	

Bitte nachrechnen!

Anmerkung zu b):

Hier soll ein Tipp gegeben werden, wie man auch ohne Tabellenkalkulationsprogramm zu (mindestens) einer Lösung gelangen kann.

$$\overline{yz} = w \cdot \overline{xyz} \Leftrightarrow (10 \cdot w + x) \cdot \overline{yz} = w \cdot (100 \cdot x + \overline{yz}) \Leftrightarrow 10 \cdot w \cdot \overline{yz} = 100 \cdot w \cdot x + w \cdot \overline{yz} \Leftrightarrow 9 \cdot w \cdot \overline{yz} = x \cdot (100 \cdot w + \overline{yz})$$

Die letzte Gleichung lässt uns schnell eine Lösung finden, wenn wir für \overline{yz} Teiler von 100 einsetzen: Setzen wir z.B. 50 ein, dann bietet sich für w die Zahl 1 an; dies führt zu $x=9$, damit die Gleichung („Bedingung“) erfüllt ist. Dies ist aber nicht die einzige Möglichkeit; denn $w=2$ liefert für die Differenz den Wert 1,5 und $x=6$. Lösungen dieser Art sehen dann so aus: $19 \cdot 50 = 1 \cdot 950$ bzw. $26 \cdot 50 = 2 \cdot 650$. Dies lässt sich weiter fortsetzen.

Anmerkung zu c):

Die scheinbar unlösbare Aufgabe kann mit der Methode von Anmerkung zu b) behandelt werden:

$$\frac{10}{z} = 1 + \frac{1}{wx} \Leftrightarrow \frac{10}{z} = \frac{wx + 1}{wx} \quad (**).$$

Nehmen wir $z > 0$ an: Die Vorgabe von z.B. $y=9$ führt zu

Die Ersetzung von z soll also zu einem gekürzten Bruch führen, dessen Zähler um 1 größer ist als sein Nenner; das erfüllen $z=9$ mit $\overline{wx} = 09$ bzw. $z=8$ mit $\overline{wx} = 04$. $w=0$ kann man als „Schönheitsfehler“ betrachten – liefert aber die Lösungen $09 \cdot 99 = 099 \cdot 9$ bzw. $04 \cdot 98 = 049 \cdot 8$. An der Gleichung (**) lässt sich ablesen, dass für Nenner nur einstellige Zahlen in Frage kommen.