**Mathetreff der Bezirksregierung Düsseldorf**
**Knobelaufgaben der Stufen 9, 10, März/ April 2004**
Wilko_Rautenberg@yahoo.de, 25.04.2004

Aufgabe 1

a. Ermittle, welches Relationszeichen (< , > , =) zwischen die Zahlen gehört: $234^{468}$ und $468^{234}$.
b. Welche Endziffer haben die beiden Zahlen in dezimaler Schreibweise?

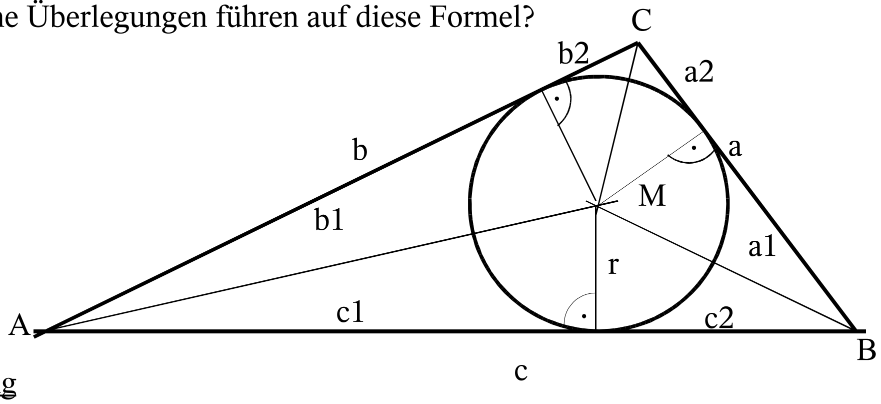
Lösung

a. $n=234 \Rightarrow 234^{468}=n^{2n}=(n\cdot n)^n>(2\cdot n)^n=468^{234}$

b. Wir haben
$$\begin{aligned} 234\cdot 234 &= \dots 6 \\ \dots 6\cdot 234 &= \dots 4 \\ \dots 4\cdot 234 &= \dots 6 \\ \dots 6\cdot 234 &= \dots 4 \quad \text{usw.,} \end{aligned}$$
so dass alle ungeraden Anzahlen von Faktoren 234 eine 4 als Endziffer des Produkts ergeben und alle geraden Anzahlen ein 6. Daraus folgt, dass $234^{468}$ die Endziffer 6 hat.
Analog:
$$\begin{aligned} 468\cdot 468 &= \dots 4 \\ \dots 4\cdot 468 &= \dots 2 \\ \dots 2\cdot 468 &= \dots 6 \\ \dots 6\cdot 468 &= \dots 8 \\ \dots 8\cdot 468 &= \dots 4 \quad \text{usw.,} \end{aligned}$$
so dass alle Anzahlen von 4n + 1 Faktoren 468 eine 8 als Endziffer des Produkts liefern, alle 4n + 2 Faktoren eine 4, alle 4n + 3 Faktoren eine 2 und alle 4n Faktoren eine 6 $(n\in\mathbb{Z}_{\geq 0})$.
Daraus folgt, dass $468^{234}$ wegen $234 = 4\cdot 58+2$ die Endziffer 4 hat.

Aufgabe 2

In einer Formelsammlung kann man nachlesen, dass für den Flächeninhalt A eines Dreiecks gilt:
A = r · s, wobei r die Größe des Inkreisradius und s die des halben Dreiecksumfangs bedeutet.
Welche Überlegungen führen auf diese Formel?




Lösung

Der Radius des Innkreises steht jeweils senkrecht auf den Seiten a,b,c (=Tangenten).
Die Fläche des Dreiecks ABM ist
$$\frac{1}{2}\cdot c_1\cdot r+\frac{1}{2}\cdot c_2\cdot r = \frac{1}{2}\cdot(c_1+c_2)\cdot r = \frac{1}{2}\cdot c\cdot r\,,$$
analog die Flächen der Dreiecke MBC = $\frac{1}{2}\cdot a\cdot r$ und AMC = $\frac{1}{2}\cdot b\cdot r$ .

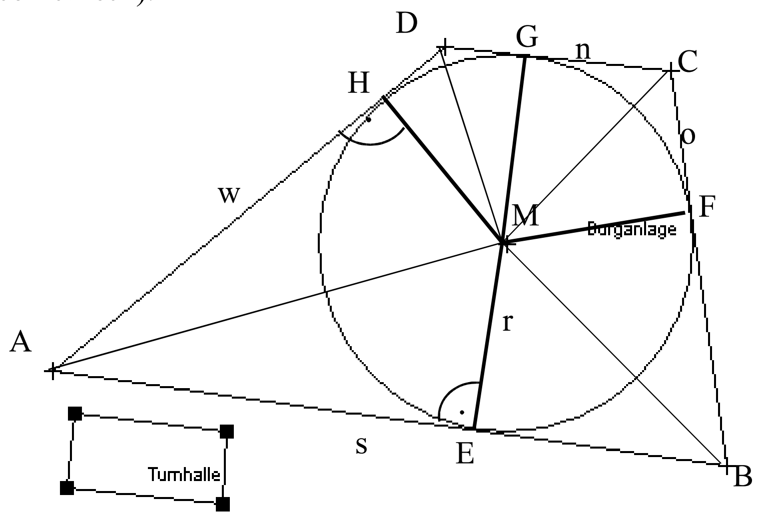
Also ist die Gesamtfläche des Dreiecks ABC die Summe dieser Teilflächen:
$\frac{1}{2}\cdot(a+b+c)\cdot r = r\cdot s$ q.e.d.

Aufgabe 3

Eine Gruppe von Schülerinnen und Schülern hatte für den Einsatz als Teststrecke im Sportunterricht ihrer angrenzenden Schule die vier geradlinigen Wegstrecken ausgemessen, die unmittelbar an der alten kreisrunden (100m im Durchmesser) Burganlage ihres Ortes vorbei und um diese herum führen. Auf Dezimetergenauigkeit ermittelten sie für die nördliche Strecke 49,6m, 142,4m für die westliche und 115,5m für die östliche. Bedauerlicherweise gingen die Unterlagen mit den Messergebnissen für die südliche Strecke, die die längste unter diesen vier Strecken ist, verloren. – Allerdings war Mathe-Marie, die immer Spitze in diesem Fach war, etwas aufgefallen, das sie beschäftigt hatte; und deshalb konnte sie sich an das Ergebnis erinnern, sagte es aber versteckt: “Ihr könnt die Länge s für die Südstrecke aus den anderen Angaben berechnen; denn wenn ihr w für die westliche, n für die nördliche und ö für die östliche Streckenlänge verwendet, dann gilt

$n^2 - w^2 + s \cdot n - ö \cdot w = ö^2 - s^2 + ö \cdot w - s \cdot n$.“

– Ermittle außer der Streckenlänge einen einfachen Zusammenhang aus diesen Angaben und beweise ihn (z.B. geometrisch).




Lösung

Mit der Formel von Mathe-Marie bekommen wir:

$$
\begin{aligned}
&n^2 - w^2 + s\cdot n - o\cdot w = o^2 - s^2 + o\cdot w - s\cdot n\\
&n^2 + 2sn + s^2 = o^2 + 2ow + w^2\\
&(n+s)^2 = (o+w)^2\\
&n+s = o+w\\
&s = o+w-n \quad \Rightarrow \quad s = 115{,}5 + 142{,}4 - 49{,}6 = 208{,}3
\end{aligned}
$$

Wir vermuten, dass im Tangentenviereck die Summe der gegenüberliegenden Seiten gleich ist ("n+s=o+w"):

Da der Radius jeweils senkrecht auf den Seiten steht, sind die Hilfsdreiecke AEM, EBM BFM MFC, MCG, DMG, HMD und AMH rechtwinklig, und da die Hypothenusen paarweise gemeinsam sind und eine Kathete gleichlang ist (r) sind die Dreiecke paarweise kongruent. Also gilt

$$
\begin{aligned}
n+s &= |\overline{DG}| + |\overline{GC}| + |\overline{AE}| + |\overline{EB}| = |\overline{HD}| + |\overline{FC}| + |\overline{AH}| + |\overline{BF}|\\
&= |\overline{AH}| + |\overline{HD}| + |\overline{BF}| + |\overline{FC}| = w + o
\end{aligned}
$$

q.e.d.