Mathetreff: Lösungen zu den Knobelaufgaben für die Klassen 9 und 10
September-Oktober 2004

Aufgabe 1

Ein genialer Fehler

Allgemein: $\frac{10x+y}{10y+z}$ mit x, y, z $\in$ IN und 1<x<9; 1<y<9;1<z<9.

Das Streichen der beiden Ziffern im Zähler und Nenner bedeutet: $\frac{10x+y}{10y+z} = \frac{x}{y}$

$\Rightarrow$ 9xz = y(10x-z) *)
$\Rightarrow$ rechte Seite durch 9 teilbar
$\Rightarrow$ y oder (10 – z) durch 9 oder beides durch 3 teilbar
y = 3 oder y = 6 oder y = 9

Für y=3 gilt z = $\frac{10}{3+\frac{1}{x}}$, Gleichung hat nur für x=3 ganzzahlige positive Lösung
z=3 $\Rightarrow$ x=y=z=3 trivial.

Für y=6 gilt z = $\frac{20}{3+\frac{2}{x}}$, mit x=1 gilt z=4; mit x=2 gilt z=5, mit x=6 gilt $\Rightarrow$ x=y=z=6 trivial.

Für y=9 gilt z = $\frac{10}{1+\frac{1}{x}}$, für x=1 gilt z=5; mit x=4 gilt z=8.

Falls (10x – z) durch 9 teilbar
$\Rightarrow$ (10x – z) Vielfaches von 9; nur für x=z möglich $\Rightarrow$ mit *) x=y=z trivial

also $\frac{19}{95}$, $\frac{26}{65}$, $\frac{49}{98}$ und $\frac{16}{64}$ mit ihren reziproken Werten $\frac{95}{19}$, $\frac{65}{26}$, $\frac{98}{49}$ und $\frac{64}{16}$

Aufgabe 2

Schwimmbadvergnügen

Bezeichnet man die Eckpunkte des regelmäßigen Zwölfecks mit P1, P2, ..., P12, den Mittepunkt seines Umkreises mit M und die Mitte der Strecke $\overline{P3M}$ mit D.
Bezeichnet man weiterhin den Flächeninhalt des regelmäßigen Zwölfecks mit A und den der linken Teilfigunr P1P2P3P4P5 mit A_1, den der mittleren Teilfigur P1P5P6P7MP11P12
mit A_2, den der rechten Teilfigur MP7P8P9 mit A_3. Der Radius des Umkreises ist r.
Das Dreieck P5MP3 ist gleichseitig mit der Seitenlänge r und der Höhe $\overline{P5D} = \frac{r}{2}\sqrt{3}$

(□ P5MP3=60° und wegen $\overline{MP5} = \overline{MP3}$).

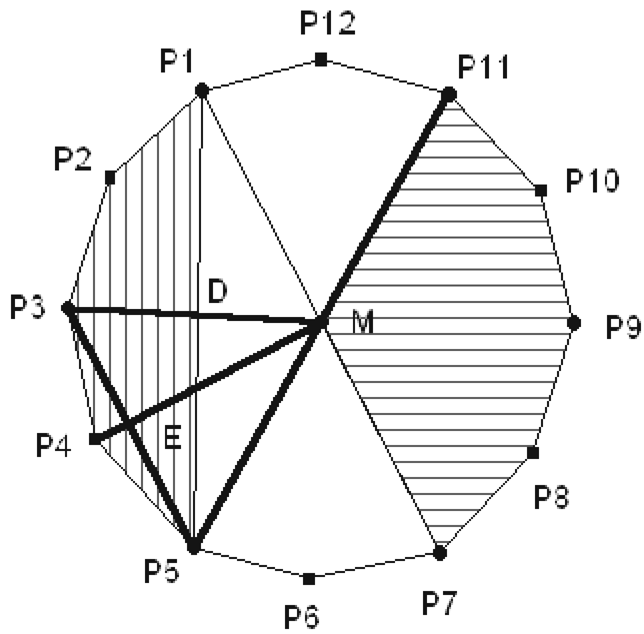
Der Flächeninhalt des Dreiecks MP1P5 beträgt also $\frac{r^2}{4}\sqrt{3}$.

Ferner ist, wenn man den Schnittpunkt der Strecken $\overline{MP4}$ und $\overline{P3P5}$ mit E bezeichnet, $\overline{P5E} = \frac{r}{2}$ und $\overline{MP4} = r$, also ist der Flächeninhalt des Dreiecks MP4P5 und aller andeen elf gleichschenkligen Dreiecke, deren Basis eine Zwölfeckseite ist und deren Spitze M ist, gleich $\frac{r^2}{4}$. Man erhält daher:

$$A_1 = 4 \cdot \frac{r^2}{4} - \frac{r^2}{4} \cdot \sqrt{3} = \frac{r^2}{4}(4 - \sqrt{3})$$

$$A_2 = 4 \cdot \frac{r^2}{4} + \frac{r^2}{4} \cdot \sqrt{3} = \frac{r^2}{4}(4 + \sqrt{3})$$

$$A_3 = 4 \cdot \frac{r^2}{4} = r^2$$



Daraus folgt
$A_1 + A_3 = \frac{r^2}{4}(8 - \sqrt{3})$ also $A_1 + A_3 > A_2$, d.h., der Flächeninhalt der mittleren Teilfigur ist etwas kleiner als die Summe der Flächeninhalte der beiden äußeren Teilfiguren.

Aufgabe 3

Wettbewerb

Eine Zahl a aus 2 Dezimalziffern hat eine eindeutige Darstellung als
$a = 10x + y$ mit $a > 0$ und $\{x,y\} \in \{0,..9\}$
Die Zahl b entsteht bei Vertauschen der beiden Dezimalziffern: $b = 10y + x$

Der Betrag c der Differenz von a und b:
$c = |a - b| = |(10x + y) - (10y + x)| = |10(x - y) - (x - y)| = 9|x - y|$

1. Fall: Für $x = y$ ist die Differenz und damit auch das Ergebnis 0.

2. Fall: Für $x \neq y$
Die Differenz ist also immer eine Vielfaches von Neun.

Sei $d = |x-y|$, die Zahl c besteht dann aus den zwei Ziffern d-1 und 10-d, denn

$c = 9|x - y| = 9d = (d - 1)*10 + (10-d)$ mit $(d-1), (10-d) \in \{0,..9\}$

Die Zahl e entseht dadurch, wenn man die Ziffern von c rückwärts notiert, also
$e = (10-d)*10+(d-1)$.

Für die Summe f von c + d erhält man $f = (d - 1)*10 + (10-d) + (10-d)*10+(d-1) = 99$

Das heißt, in jedem Fall erhält man entweder 0 oder 99.