

**Mathetreff: Lösungen zu den Knobelaufgaben für die Oberstufe
September-Oktober 2004**



Aufgabe 1

Ein genialer Fehler

Allgemein: $\frac{10x+y}{10y+z}$ mit $x, y, z \in \mathbb{N}$ und $1 < x < 9$; $1 < y < 9$; $1 < z < 9$.

Das Streichen der beiden Ziffern im Zähler und Nenner bedeutet: $\frac{10x+y}{10y+z} = \frac{x}{y}$

$\Rightarrow 9xz = y(10x-z)$ *)
 \Rightarrow rechte Seite durch 9 teilbar
 $\Rightarrow y$ oder $(10-z)$ durch 9 oder beides durch 3 teilbar
 $y = 3$ oder $y = 6$ oder $y = 9$

Für $y=3$ gilt $z = \frac{10}{3 + \frac{1}{x}}$, Gleichung hat nur für $x=3$ ganzzahlige positive Lösung

$z=3 \Rightarrow x=y=z=3$ trivial.

Für $y=6$ gilt $z = \frac{20}{3 + \frac{2}{x}}$, mit $x=1$ gilt $z=4$; mit $x=2$ gilt $z=5$, mit $x=6$ gilt $\Rightarrow x=y=z=6$

trivial.

Für $y=9$ gilt $z = \frac{10}{1 + \frac{1}{x}}$, für $x=1$ gilt $z=5$; mit $x=4$ gilt $z=8$.

Falls $(10x-z)$ durch 9 teilbar
 $\Rightarrow (10x-z)$ Vielfaches von 9; nur für $x=z$ möglich \Rightarrow mit *) $x=y=z$ trivial

also $\frac{19}{95}$, $\frac{26}{65}$, $\frac{49}{98}$ und $\frac{16}{64}$ mit ihren reziproken Werten $\frac{95}{19}$, $\frac{65}{26}$, $\frac{98}{49}$ und $\frac{64}{16}$

Aufgabe 2

Aprilwetter

Sei x die Füllzeit der schnelleren Eismaschine, dann folgt daraus folgende Bestimmungsgleichung:

$$\frac{12}{x} + \frac{12}{x+10} = 1$$

mit $D = \mathbb{R} \setminus \{0; -10\}$. Diese Gleichung führt auf

$$x^2 - 4x - 120 = 0 \quad x_1 = 20; \Rightarrow x_2 = -6 \text{ entfällt.}$$

Die Füllzeiten betragen 20 bzw. 30 Minuten.

Aufgabe 3

Wettbewerb

Bezeichne x die Preissenkung in Euro und y die Einnahmen, dann gilt:

$$y = (30 - x) \cdot (5000 + 250 \cdot x) = -250 \cdot x^2 + 2500 \cdot x + 150000$$

x	Stundenpreis in Euro	Anzahl der ausgeliehenen Boote pro Monat	Einnahmen in Euro
0	30	5000	150000
1	29	5250	152250
2	28	5500	154000
3	27	5750	155250

Obige Gleichung $y = (30 - x) \cdot (5000 + 250 \cdot x) = -250 \cdot x^2 + 2500 \cdot x + 150000$

kann auch als Funktionsgleichung einer nach unten geöffneten Parabel aufgefasst werden.

Die maximalen Einnahmen werden dann erreicht, wenn $P_{\max}(x|y)$ gleich dem Scheitelpunkt der Parabel ist.

Man bestimme den Scheitelpunkt der Parabel und erhält $x = 5$ und $y = 156250$.

D.h. für einen Ausleihpreis von 25 Euro pro Stunde sind die erzielten Einnahmen mit 156250 Euro pro Monat maximal.