Mathetreff: Lösungen zu den Knobelaufgaben für die Klassen 9 und 10
November-Dezember 2004

Aufgabe 1

Zu zeigen ist die Teilbarkeit von $(p^2 – 1)$ durch 24 für alle Primzahlen p größer als 3. Mit Anwendung der dritten binomischen Formel kann die Differenz in das Produkt

(p – 1)(p + 1) umgewandelt werden. (p – 1), p und (p + 1) sind drei aufeinander folgende natürliche Zahlen (größer als 3); p ist ungerade, daraus folgt, dass Vorgänger bzw. Nachfolger Vielfaches von 2 bzw. 4 (oder umgekehrt) sind; das bedeutet, dass das Produkt durch $2 \cdot 4$ teilbar sein muss. Nun findet sich unter drei aufeinander folgenden natürlichen Zahlen auch ein Vielfaches von 3; dieses findet sich bei (p-1) oder bei (p+1), weil p nach Voraussetzung nicht Vielfaches von 3 sein kann. Das heißt aber: Das Produkt bzw. die Differenz ist durch $2 \cdot 3 \cdot 4$ (=24) teilbar.

Aufgabe 2

(Der Bezug ist die Figur 3 in der Aufgabenstellung.)

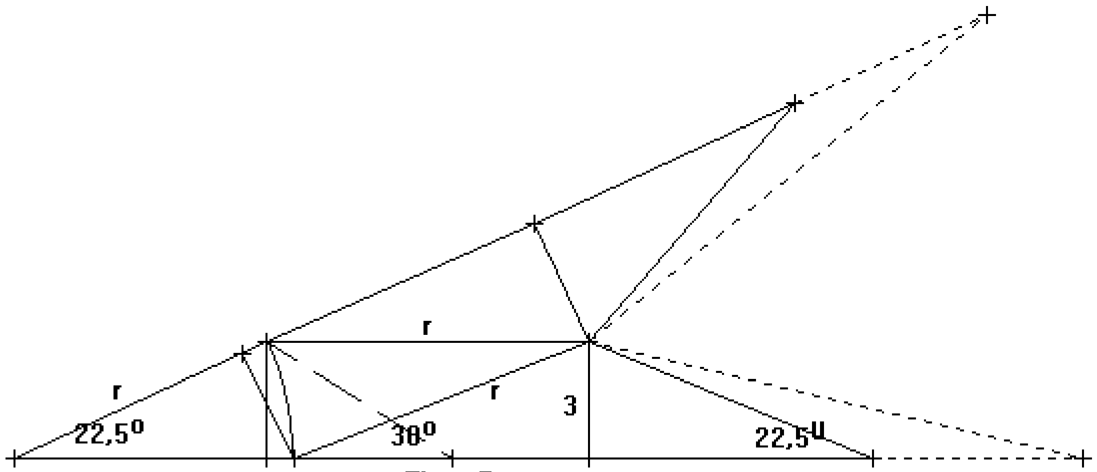
Durch das fortgesetzte Falten erreichen die Winkel an den Enden der Papierstreifen schließlich das Maß 45º. Für Überlappungen bleiben 22,5º. Zum Bau eines Sterns benötigt man (360:22,5) 16 Teile. Je zwei benachbarte Teile haben eine rautenförmige Überlappungszone. Die Länge

$$\left(r = \frac{3cm}{\sin 22{,}5^o}\right)$$

der Rautenseiten entspricht der Kantenlänge r einer Sternecke.

Damit muss die Länge des Papierrechtecks vor der Faltung folgendes Maß haben:

$$l = 2 \cdot \frac{3cm}{\tan 22{,}5^o} + \frac{3cm}{\sin 22{,}5^o} \approx 22{,}3cm$$



Figur 5

(Anmerkung: Wer noch nicht über trigonometrische Kenntnisse verfügte, konnte auch – ganz im Sinne ‚produktiver Aufgaben' – Näherungen auf experimenteller Grundlage einsenden. Zeitbedarf bei sorgfältiger Herstellung etwa 90 – 150 min). zu

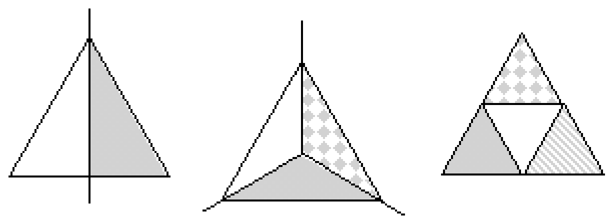
2.b) i) Vom Stern- bzw. Blattsymmetriepunkt aus gesehen wird zwischen den benachbarten Sternecken ein Winkel von (360º:8) 45ºgemessen. Die vier gefalteten Teile müssen also eine punkt- und spiegelsymmetrische Sechseckfigur besitzen, um die Forderungen zu erfüllen. Nach Figur 5 gilt dann für ihre Länge:

$$l = 4 \cdot \frac{3cm}{\tan 22{,}5^o} = \frac{12cm}{\tan 22{,}5^o} \approx 28{,}97cm$$

zu 2.b) ii) Für die Länge gilt hier

$$l = 2 \cdot \left(3cm \cdot \cos 30^o + \frac{3cm}{\tan 22{,}5^o} \right) = 6cm \cdot \left(\sqrt{3} * \cot 22{,}5^o \right) \approx 24{,}88cm$$

Aufgabe 3



zu a) Man erhält zwei gleiche große Teilflächen, indem man von einem Eckpunkt eine Strecke zur Mitte der gegenüberliegenden Seite zeichnet. Man bekommt drei gleich große Teilflächen, wenn man von dem „Mittelpunkt“ des Dreiecks je eine Strecke bis zu den Eckpunkten des Dreiecks zeichnet. Eine Einteilung in vier gleich große Flächen erhält man, wenn man z.B. die Mittelpunkte der Seiten durch Strecken verbindet.

(weitere Beispiele in den Lösungen der Klassen 7/8)

zu b)

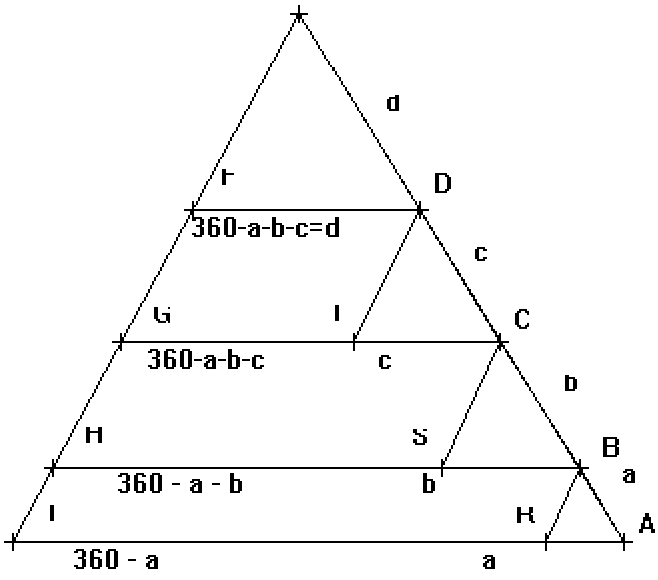
Es gibt viele Ansätze zur Lösungsvielfalt dieses Problems (vgl. Bilder zu 3.a)!).

In Figur 1 finden wir einen Zugang mit verblüffend einfachem Weg:

Ziel ist es, das gleichseitige Dreieck so durch drei geeignete Parallelen zu einer Seite in drei gleichschenklige Trapeze und ein (gleichseitiges) Dreieck zu zerlegen, dass diese Teilfiguren gleichen Umfang haben; die Trapeze werden zum besseren Nachvollziehen der Lösungsidee in jeweils Parallelogramm und Dreieck geteilt. Für den Umfang u des unteren Trapezes gilt dann: u = 360 + a + (360-a) + a = 720 + a

Für den Umfang (gleicher Größe) des angrenzenden Trapezes gilt: u = (360-a + b + (360-a-b) + b = 720 -2a + b Wegen der gleichen Größe dieser Terme folgt hieraus b = 3a –

Entsprechend fortgesetzt kann hergeleitet werden: c = 3b, d = 3c; folgerichtig gilt: b=3a und c=9a und d = 27a, und wegen a + b + c + d = 360 gilt: a = 9, b = 27, c = 81 und d = 243. Jeder Umfang ist damit 729m lang.



Dreiecksteilung Figur 1