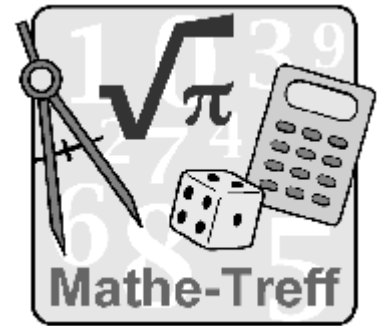


Mathetreff: Lösungen zu den Knobelaufgaben für die Klassen 11 bis 13
November-Dezember 2004



Aufgabe 1

Zu zeigen ist die Teilbarkeit von $(p^2 - 1)$ durch 24 für alle Primzahlen p größer als 3. Mit Anwendung der dritten binomischen Formel kann die Differenz in das Produkt $(p - 1)(p + 1)$ umgewandelt werden. $(p - 1)$, p und $(p + 1)$ sind drei aufeinander folgende natürliche Zahlen (größer als 3); p ist ungerade, daraus folgt, dass Vorgänger bzw. Nachfolger Vielfaches von 2 bzw. 4 (oder umgekehrt) sind; das bedeutet, dass das Produkt durch $2 \cdot 4$ teilbar sein muss. Nun findet sich unter drei aufeinander folgenden natürlichen Zahlen auch ein Vielfaches von 3; dieses findet sich bei $(p-1)$ oder bei $(p+1)$, weil p nach Voraussetzung nicht Vielfaches von 3 sein kann. Das heißt aber: Das Produkt bzw. die Differenz ist durch $2 \cdot 3 \cdot 4 (=24)$ teilbar.

Aufgabe 2

Zu 2.a)

(Der Bezug ist die Figur 3 in der Aufgabenstellung.)

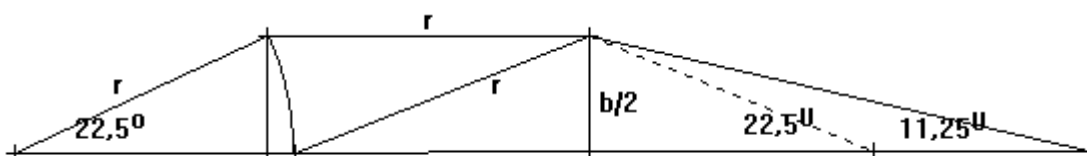
Durch das fortgesetzte Falten erreichen die Winkel an den Enden der Papierstreifen schließlich das Maß 45° . Für Überlappungen bleiben $22,5^\circ$. Zum Bau eines Sterns benötigt man $(360:22,5)$ 16 Teile. Je zwei benachbarte Teile haben eine rautenförmige Überlappungszone. Die Länge

$$\left(r = \frac{\frac{1}{2} \cdot b}{\sin 22,5^\circ} \right)$$

der Rautenseiten entspricht der Kantenlänge r einer Sternecke.

Damit steht die Länge des Papierrechtecks vor der Faltung in folgendem Verhältnis zur Breite

$$l = 2 \cdot \frac{b/2}{\tan 22,5^\circ} + \frac{b/2}{\sin 22,5^\circ} \Leftrightarrow l : b = \frac{1}{\tan 22,5^\circ} + \frac{1}{2 \sin 22,5^\circ} \approx 3,72 : 1$$



Figur 6

zu 2.b) Entsprechend gilt für das Verhältnis von Länge und Breite eines Papierstreifens für Sterne nach Teilen entsprechend Figur 4 der Aufgabenstellung:

$$l = \frac{\frac{b}{2}}{\tan 22,5^\circ} + \frac{\frac{b}{2}}{\sin 22,5^\circ} + \frac{\frac{b}{2}}{\tan 11,25^\circ} \Leftrightarrow l : b = \frac{1}{2} \cdot \left(\cot 22,5^\circ + \frac{1}{\sin 22,5^\circ} + \cot 11,25^\circ \right) \approx 5,03 : 1$$

Aufgabe 3

zu 3a)

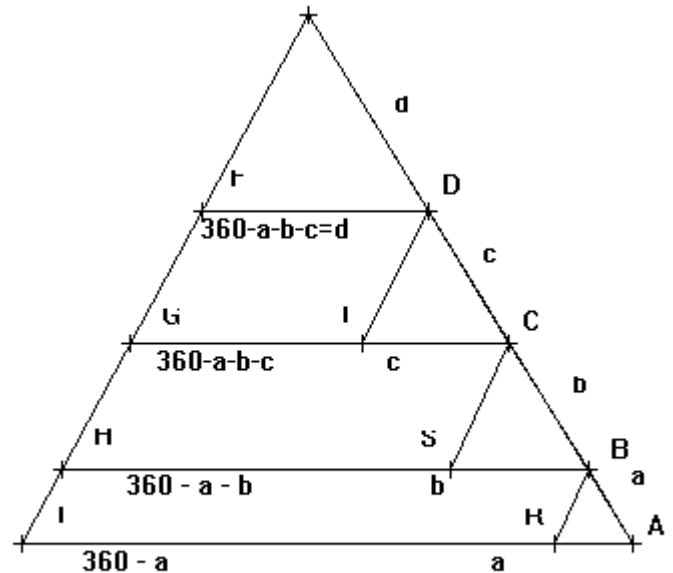
Es gibt viele Ansätze zur Lösungsvielfalt dieses Problems (vgl. Bilder zu 3.a!).

In Figur 1 finden wir einen Zugang mit verblüffend einfachem Weg:

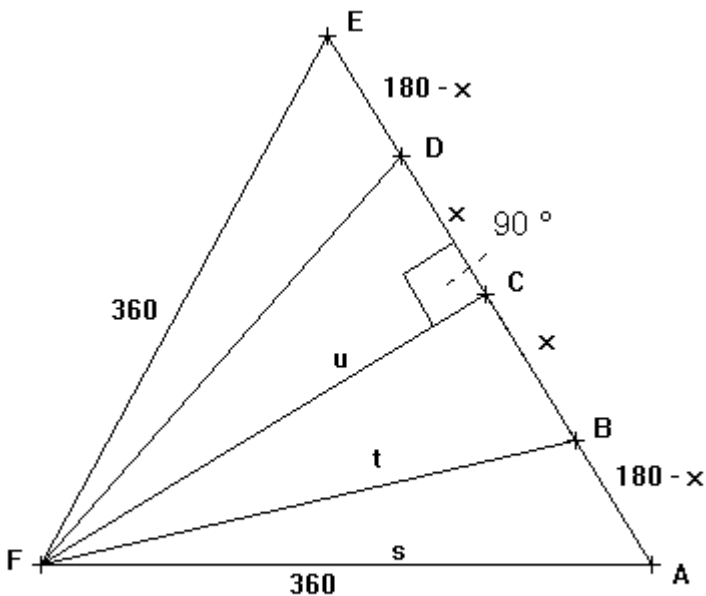
Ziel ist es, das gleichseitige Dreieck so durch drei geeignete Parallelen zu einer Seite in drei gleichschenklige Trapeze und ein (gleichseitiges) Dreieck zu zerlegen, dass diese Teilfiguren gleichen Umfang haben; die Trapeze werden zum besseren Nachvollziehen der Lösungsidee in jeweils Parallelogramm und Dreieck geteilt. Für den Umfang u des unteren Trapezes gilt dann: $u = 360 + a + (360-a) + a = 720 + a$

Für den Umfang (gleicher Größe) des angrenzenden Trapezes gilt: $u = (360-a + b + (360-a-b) + b = 720 - 2a + b$ Wegen der gleichen Größe dieser Terme folgt hieraus $b = 3a -$

Entsprechend fortgesetzt kann hergeleitet werden: $c = 3b$, $d = 3c$; folgerichtig gilt: $b=3a$ und $c=9a$ und $d = 27a$, und wegen $a + b + c + d = 360$ gilt: $a = 9$, $b = 27$, $c = 81$ und $d = 243$. Jeder Umfang ist damit 729m lang.



Dreiecksteilung Figur 1



Dreiecksteilung Figur 2

Hinter der hier angegebenen Lösung steht der Gedanke, dass hiermit (wurde in keiner Einsendung vorgeschlagen) 3.b) leicht zu lösen ist.

Die spiegelsymmetrische Aufteilung des Dreiecks reduziert zwar den Aufwand, jedoch unterstützt sie nicht die Idee von vier unterschiedlich großen Flächen wie im erwähnten Beispiel Figur 1 (Aufg.3,

$$u(FCD) = 180\sqrt{3} + x + \sqrt{x^2 + (180\sqrt{3})^2} = 180\sqrt{3} + x + \sqrt{x^2 + 97200}$$

Stufen 9/10).

$$u(FDE) = \sqrt{x^2 + 97200} + (180 - x) + 360$$

Hieraus kann wegen der gleichgroßen Umfänge ermittelt werden:

$$x = 90(3 - \sqrt{3})$$

und

$$180 - x = 90(\sqrt{3} - 1)$$

Die Umfänge sind damit etwa 744,539 m lang.

zu 3.b) Die Pacht für ABF ist so groß wie die von DEF; gleiches gilt für BCF und CDF (Spiegelsymmetrie). Das Verhältnis der Pachtbeträge entspricht dem Verhältnis $(180-x):x$, da die gemeinsame Höhenangabe aus den Flächeninhaltsformeln gekürzt wird.

$$(180 - x) : x = [90(\sqrt{3} - 1)] : [90(3 - \sqrt{3})] = \sqrt{3} : 3$$

Die Pachtbeträge verhalten sich ungefähr wie 0,5774 : 1.

Es soll nun noch das Verhältnis der Flächen nach der erwähnten Figur 1 betrachtet werden (vom Dreieck angefangen nach unten):

$$\left(\frac{d^2}{4} \sqrt{3}\right) : \left(\frac{d+c+d}{2} \cdot \frac{c}{2} \sqrt{3}\right) = \dots = 9 : 7$$

$$\left(\frac{2d+c}{2} \cdot \frac{c\sqrt{3}}{2}\right) : \left(\frac{2d+2c+b}{2} \cdot \frac{b}{2} \sqrt{3}\right) = \dots = 63 : 25$$

$$\left(\frac{2d+2c+b}{2} \cdot \frac{b}{2} \sqrt{3}\right) : \left(\frac{2d+2c+2b+a}{2} \cdot \frac{a}{2} \sqrt{3}\right) = \dots = 198 : 79$$

Bei einer angenommenen Jahrespacht von 197,50 € für das kleinste Grundstück wären das für die anderen 495,00 €, 1247,40 € sowie 1603,80 € (ca. achtmal so viel wie der kleinste Preis); das sind für alle etwa 0,063 € Pacht je Quadratmeter im Jahr.