Mathetreff: Lösungen zu den Knobelaufgaben für die Klassen 7 und 8
Januar - März

Aufgabe 1

Aus drei verschiedenen Ziffern a, b, c lassen sich 6 verschiedene dreistellige Zahlen bilden, in denen jede Ziffer jeweils einmal vorkommt. Wenn man diese sechs Zahlen addiert, kommt jede Ziffer an jeder Stelle genau zweimal vor. Dann sind die Summen in den einzelnen Stellen:

Einer: $2a + 2b + 2c = 2\,(a + b + c)$, ,
Zehner: $10\,(2a + 2b + 2c) = 20\,(a + b + c)$,
Hunderter: $100\,(2a + 2b + 2c) = 200\,(a + b + c)$,
Summe: $222\,(a + b + c)$.

Wenn $a = 2$, $b = 4$, $c = 6$ sind, ist $(a + b + c) = 12$ und es ergibt sich für die Summe der aus diesen Ziffern gebildeten dreistelligen Zahlen der Wert 2664.

Die Summe der Zahlen beträgt $222(a + b + c)$. Sie ist mindestens durch 1, 2, 3, 6, 37, 74, 111, 222 teilbar, da $222 = 2 \cdot 3 \cdot 37$ ist. Außerdem ist sie durch $(a + b + c)$ und, falls $(a + b + c)$ nicht prim ist, durch alle anderen Teiler von $(a + b + c)$ teilbar, die nicht schon Teiler von 222 sind.

Aufgabe 2

Es werden folgende Variablen festgelegt:
b: zweite Ziffer $0 < b < 10$,
s: Summe der beiden Zahlen
$s = 10a + b + 10b + a$,

a: erste Ziffer $0 < a < 10$,
$s = 11(a + b)$.

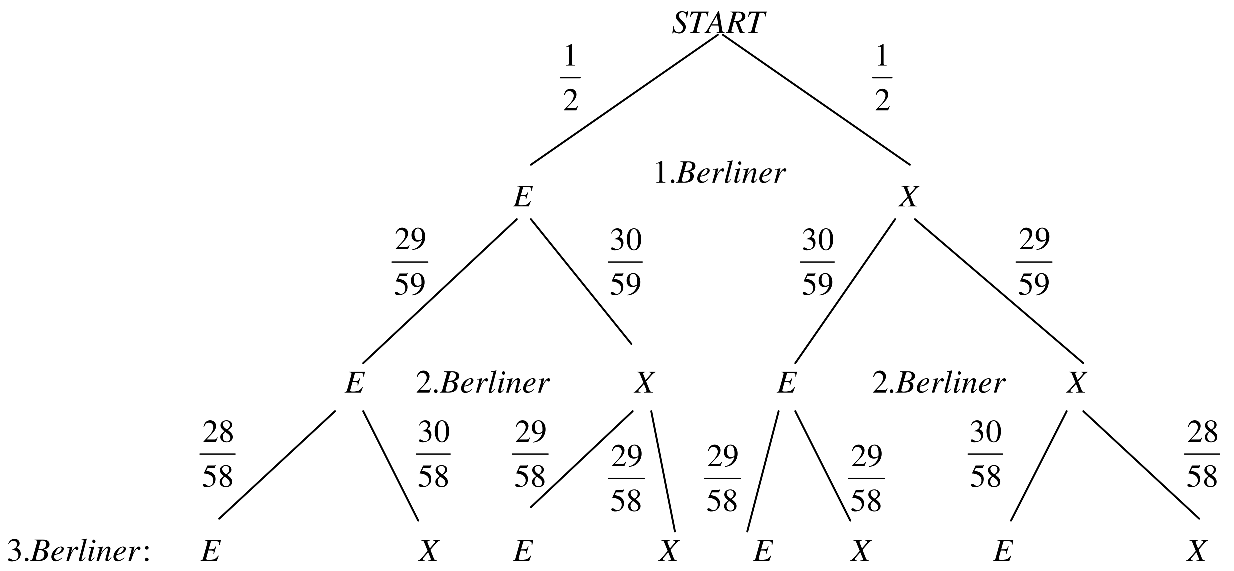
Die Quadratzahl muss durch 11 teilbar sein. Da weder a noch b größer als 9 sein kann, ist $a + b$ mit Sicherheit kleiner als 19.
Da $11 \cdot 19 = 209$ gilt, muss die Quadratzahl, die durch 11 teilbar sein soll, kleiner als 209 sein. Die einzige durch 11 teilbare Quadratzahl kleiner als 209 ist 11^2. Also muss auch $a+b = 11$ sein.

Dafür gibt es 8 Möglichkeiten:

(2 + 9), (3 + 8), (4 + 7), (5 + 6), (6 + 5), (7 + 4), (8 + 3), (9 + 2).
Es gibt also 8 solcher Zahlen.

Aufgabe 3

Zum Lösen dieser Aufgabe bietet ein Baumdiagramm an . Das Ergebnis „E“ bedeutet, es wurde ein Berliner mit Erdbeermarmelade gezogen, das Ergebnis „X“ bedeutet, dass ein Berliner ohne Erdbeermarmelade gezogen wurde. An den Ästen werden aufgrund der Aufgabenstellung die jeweiligen Wahrscheinlichkeiten eingetragen.



Im 1. Schritt ist die Wahrscheinlichkeit für E oder “nicht E” beide Male ½. Im 2. Schritt sind 29 der noch vorhandenen 59 Berliner E, falls im 1. Schritt E gezogen wurde, sonst 30/59. Im 3. Schritt sind es 28/58 für E, falls schon 2mal E gezogen wurde, bzw. 29/58 für E, falls erst 1mal E gezogen wurde, oder 30/58, falls noch gar kein E gezogen wurde. Entsprechend ergeben sich die Wahrscheinlichkeiten für X.

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{29}{59}\cdot\frac{28}{58}+\frac{1}{2}\cdot\frac{30}{59}\cdot\frac{29}{58}+\frac{1}{2}\cdot\frac{30}{59}\cdot\frac{29}{58}+\frac{1}{2}\cdot\frac{29}{59}\cdot\frac{30}{58}=\frac{1}{2}$$

Die Summe der Wahrscheinlichkeiten, im dritten Schritt „E“ zu ziehen, ist dann $\frac{1}{2}$, denn: