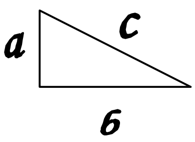
Mathetreff: Lösungen zu den Knobelaufgaben für die Klassen 9 und 10
Januar - März

Hier ist eine leicht gekürzte Lösung von Michael Schubert für alle drei Aufgaben, zur Zeit Schüler der Klassenstufe 6:

Aufgabe 1



$a^2 + b^2 = c^2 \quad a, b, c \in IN$

$c^2 - b^2 = a^2 \quad c > b, a > 1$

$0 + 1 = 1 = 1^2$
$1 + 3 = 4 = 2^2$
$4 + 5 = 9 = 3^2$
$9 + 7 = 16 = 4^2$
$16 + 9 = 25 = 5^2$
$25 + 11 = 36 = 6^2$
$36 + 13 = 49 = 7^2$
$49 + 15 = 64 = 8^2$
$64 + 17 = 81 = 9^2$
$81 + 19 = 100 = 10^2$

Es lässt sich jede ungerade Zahl z = 2n+1 mit z > 1 als Differenz zweier aufeinander folgender

$$z = 2n + 1 = (n+1)^2 - n^2, \qquad n, z \in \mathrm{IN}$$

$$\Rightarrow n + 1 = z + \frac{1}{2}$$

Quadratzahlen darstellen, da

Eigentlich ist die Differenz z zweier Quadratzahlen c^2 und b^2 nur die Summe von t aufeinander folgenden ungeraden Zahlen. Deren Anzahl t ist Teiler der Differenz $(c^2 - b^2)$:

$$c = n + t \qquad \text{und} \qquad b = n, \qquad n, t \in \mathrm{IN}$$

$$z = c^2 - b^2 = (n+t)^2 - n^2 = (2n+t)t, z > 1$$

$$z = d \cdot t, \qquad \text{wobei} \quad d > t$$

$$d = 2n + t,$$

d ist der Durchschnitt der t aufeinander folgenden ungeraden Zahlen. Dabei gilt, dass entweder t und d beide gerade oder beide ungerade sind.

$$d = 2n + t$$

$$\Rightarrow n = d - \frac{t}{2}$$

Wenn ich eine Zahl z als Produkt aus einem Teiler t und einem Durchschnitt d mit t < d bzw. $t < \frac{z}{t}$ schreiben kann, dann kann ich z als Differenz $(c^2 - b^2)$ schreiben.

$$z = c^2 - b^2 \qquad c = n + t = d + \frac{t}{2}, \quad b = n = d - \frac{t}{2}$$

$$z = (d + \frac{t}{2})^2 - (d - \frac{t}{2})^2$$

$$z = d \cdot t$$

Fall 1: z ist ungerade

Wenn z ungerade ist, dann müssen d und t ebenfalls ungerade sein. Mit d = z und t = 1 gibt es mindestens eine mögliche Darstellung jeder ungeraden Zahl z als Differenz (c^2 - b^2).

Ist z keine Primzahl, so gibt es für alle Teiler t von z mit $t < \frac{z}{t}$ weitere Lösungen für b und c:

Beispiel: $z = 2005^2 = 5 \cdot 5 \cdot 401 \cdot 401$

t	$d = \frac{z}{t}$	$c = d + \frac{t}{2}$	$b = d - \frac{t}{2}$	c^2 - b^2
1	2005^2	2.010.013	2.010.012	2005^2
5	$5 \cdot 401 \cdot 401$	402005	402000	2005^2
$5 \cdot 5$	$401 \cdot 401$	80413	80388	2005^2
401	$5 \cdot 5 \cdot 401$	5213	4812	2005^2

Fall 2: z ist gerade

Wenn z gerade ist, dann müssen d und t ebenfalls gerade sein. Gerade Zahlen, die sich nicht in zwei gerade Faktoren zerlegen lassen, sind somit nicht als Differenz von Quadratzahlen darstellbar!

Von den geraden Zahlen lassen sich also nur die durch 4 teilbaren als Differenz zweier Quadratzahlen schreiben.

Für alle durch 4 teilbaren Zahlen z > 4 (also auch für alle geraden Quadratzahlen $a^2 > 2^2$) gibt es mit d = $^z/_2$ und t = 2 mindestens eine mögliche Darstellung als Differenz (c^2 - b^2).

Wenn z noch weitere gerade Teiler t mit geradem $\frac{z}{t}$ und $t < \frac{z}{t}$ hat, so gibt es weitere Lösungen für b und c.

Ich kann also für alle Jahreszahlen a > 2 natürliche Zahlen b und c finden, für die gilt

$$c^2 - b^2 = a^2:$$
$$a^2 = z = d \cdot t, \qquad d, t \in \mathrm{IN}, t < d \qquad t \text{ und beide gerade, falls } a^2 \text{ gerade}$$
$$c = d + \frac{t}{2},$$
$$b = d - \frac{t}{2}$$

Aufgabe 2

Ein Mensch hat mindestens 0 und höchstens 539999 Haare. Also hat man 540000 Möglichkeiten für die Anzahl der Haare. Da aber mehr als 540000 Menschen in Düsseldorf leben, gibt es mit Sicherheit zwei Menschen mit der gleichen Anzahl Haare auf dem Kopf. Nebenbei bemerkt, hat ein Mensch deutlich weniger Haare auf dem Kopf.

Aufgabe 3

Sei a die Länge der kürzeren Kathete des rechtwinkligen Dreiecks. Die längere Kathete ist somit 2a lang. Die Hypotenuse dieses Dreiecks ist $\sqrt{a^2+4a^2}=a\sqrt{5}$ lang.
Für den Flächeninhalt dieses Dreiecks gilt:

$$\frac{a\cdot 2a}{a}=a^2$$

Jetzt werden die 20 Dreiecke zu einem Quadrat zusammengelegt. Wenn dies möglich sein soll, so gilt für den Flächeninhalt des Quadrates:

$$20\cdot a^2$$

Wie lang ist eine Seite des Quadrates?

$$\sqrt{20a^2}=2a\sqrt{5}$$

Dies ist aber genau doppelt so lang wie die Länge der Hypotenuse.

Daraus folgt, dass man mit solchen rechtwinkligen Dreiecken ein Quadrat legen kann, siehe auch die Skizze dazu.