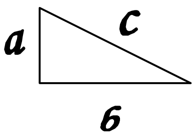
# Mathetreff: Lösungen zu den Knobelaufgaben für die Oberstufe
# Januar - März

**Aufgabe 1**

Hier ist eine leicht gekürzte Lösung von Michael Schubert für alle drei Aufgaben, zur Zeit Schüler der Klassenstufe 6:




$a^2 + b^2 = c^2 \quad a, b, c \in IN$

$c^2 - b^2 = a^2 \quad c > b, a > 1$

$0 + 1 = 1 = 1^2$
$1 + 3 = 4 = 2^2$
$4 + 5 = 9 = 3^2$
$9 + 7 = 16 = 4^2$
$16 + 9 = 25 = 5^2$
$25 + 11 = 36 = 6^2$
$36 + 13 = 49 = 7^2$
$49 + 15 = 64 = 8^2$
$64 + 17 = 81 = 9^2$
$81 + 19 = 100 = 10^2$

Es lässt sich jede ungerade Zahl z = 2n+1 mit z > 1 als Differenz zweier aufeinander folgender

$$z = 2n + 1 = (n+1)^2 - n^2, \qquad n, z \in \mathrm{IN}$$

$$\Rightarrow n + 1 = z + \frac{1}{2}$$

Quadratzahlen darstellen, da

Eigentlich ist die Differenz z zweier Quadratzahlen $c^2$ und $b^2$ nur die Summe von t aufeinander folgenden ungeraden Zahlen. Deren Anzahl t ist Teiler der Differenz ($c^2$ - $b^2$):

$$c = n + t \qquad \text{und} \qquad b = n, \qquad n, t \in \mathrm{IN}$$

$$z = c^2 - b^2 = (n+t)^2 - n^2 = (2n+t)t, z > 1$$

$$z = d \cdot t, \qquad \text{wobei} \quad d > t$$

$$d = 2n + t,$$

d ist der Durchschnitt der t aufeinander folgenden ungeraden Zahlen. Dabei gilt, dass entweder t und d beide gerade oder beide ungerade sind.

$$d = 2n + t$$

$$\Rightarrow n = d - \frac{t}{2}$$

Wenn ich eine Zahl z als Produkt aus einem Teiler t und einem Durchschnitt d mit t < d bzw. $t < \frac{z}{t}$ schreiben kann, dann kann ich z als Differenz ($c^2$ - $b^2$) schreiben.

$$z = c^2 - b^2 \qquad c = n + t = d + \frac{t}{2}, \quad b = n = d - \frac{t}{2}$$

$$z = (d + \frac{t}{2})^2 - (d - \frac{t}{2})^2$$

$$z = d \cdot t$$

***Fall 1: z ist ungerade***

Wenn z ungerade ist, dann müssen d und t ebenfalls ungerade sein. Mit d = z und t = 1 gibt es mindestens eine mögliche Darstellung jeder ungeraden Zahl z als Differenz ($c^2$ - $b^2$).

Ist z keine Primzahl, so gibt es für alle Teiler t von z mit $t < \frac{z}{t}$ weitere Lösungen für b und c:

Beispiel: $z = 2005^2 = 5 \cdot 5 \cdot 401 \cdot 401$

| t | $d = \frac{z}{t}$ | $c = d + \frac{t}{2}$ | $b = d - \frac{t}{2}$ | $c^2 - b^2$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | $2005^2$ | 2.010.013 | 2.010.012 | $2005^2$ |
| 5 | $5 \cdot 401 \cdot 401$ | 402005 | 402000 | $2005^2$ |
| $5 \cdot 5$ | $401 \cdot 401$ | 80413 | 80388 | $2005^2$ |
| 401 | $5 \cdot 5 \cdot 401$ | 5213 | 4812 | $2005^2$ |

***Fall 2: z ist gerade***

Wenn z gerade ist, dann müssen d und t ebenfalls gerade sein. Gerade Zahlen, die sich nicht in zwei gerade Faktoren zerlegen lassen, sind somit nicht als Differenz von Quadratzahlen darstellbar!

Von den geraden Zahlen lassen sich also nur die durch 4 teilbaren als Diff erenz zweier Quadratzahlen schreiben.

Für alle durch 4 teilbaren Zahlen z > 4 (also auch für alle geraden Quadratzahlen $a^2 > 2^2$) gibt es mit d = $^z/_2$ und t = 2 mindestens eine mögliche Darstellung als Differenz ($c^2$ - $b^2$).

Wenn z noch weitere gerade Teiler t mit geradem $\frac{z}{t}$ und $t < \frac{z}{t}$ hat, so gibt es weitere Lösungen für b und c.

Ich kann also für alle Jahreszahlen a > 2 natürliche Zahlen b und c finden, für die gilt

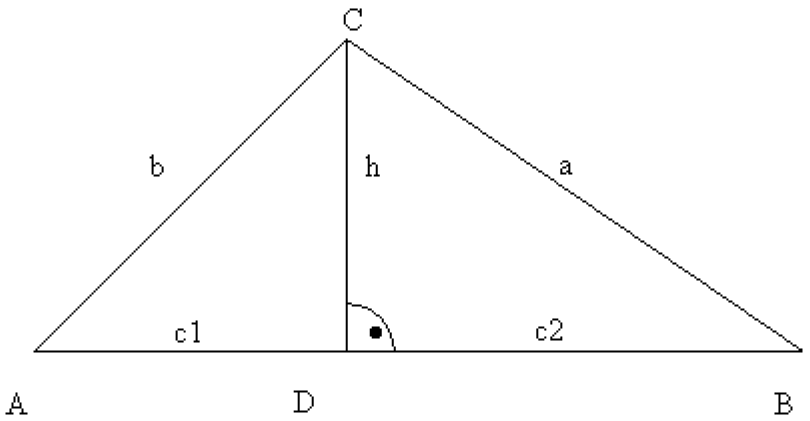
$$c^2 - b^2 = a^2:$$

$$a^2 = z = d \cdot t, \qquad d, t \in \mathbb{N}, t < d \qquad t \text{ und beide gerade, falls } a^2 \text{ gerade}$$

$$c = d + \frac{t}{2},$$

$$b = d - \frac{t}{2}$$

**Aufgabe 2**




Das Dreieck FM1 = A, FM2 = B, FM3 = C wird durch die eingezeichnete Höhe (Höhenfußpunkt D) in zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegt, siehe dazu die Skizze!

Man sucht laut Aufgabenstellung zwei rechtwinklige Dreiecke, die eine gemeinsame Kathete haben. Dies wird dadurch realisiert, wenn man zwei verschiedene pythagoreischen Zahlentripel angibt, die – geometrisch gesehen - eine gemeinsame Kathete haben. In zwei Gleichungen ausgedrückt gilt also:

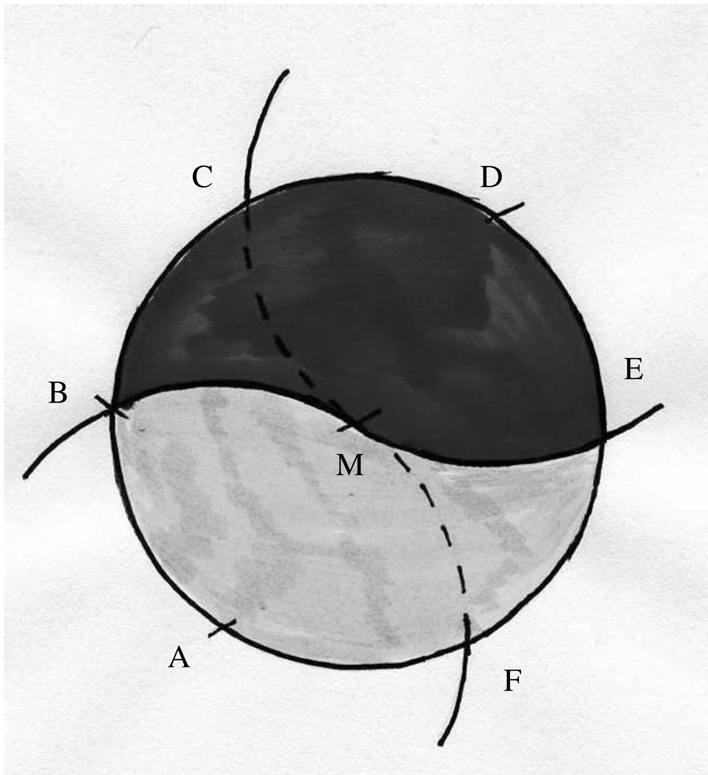
$b^2 = c1^2 + h^2$

$a^2 = c2^2 + h^2$

In der Aufgabe 1 ist die Konstruktion von pythagoreischen Zahlentripeln gezeigt worden.
Zum Beispiel findet man solche passenden Tripel in der unteren Tabelle:

| b | c1 | h | c2 | a |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |
| 13 | 5 | 12 | 9 | 15 |
| 5 | 3 | 4 | 3 | 5 |
| 26 | 10 | 24 | 7 | 25 |
| … | … | … | … | … |

**Aufgabe 3**




Eine mögliche Lösung ist im nebenstehenden Bild zu erkennen.

Man zeichnet zuerst einen Kreis k mit dem Mittelpunkt M und dem Radius r. Anschließend trägt man den Radius r auf der Kreislinie sechsmal ab und erhält die Punkte A, B, C, D, E, F.
Um z.B. A und D werden jeweils mit dem Radius r zwei Kreise $k_1$ und $k_2$ gezeichnet.
Nun ist der ursprüngliche Kreis in vier Flächen aufgeteilt, wobei die beiden sich jeweils gegenüberliegenden Flächen kongruent sind. Je zwei nebeneinander liegende Felder zusammengenommen ergeben eine Kreishälfte.
Dies ist eine Lösung der Aufgabe.