Mathetreff: Lösungen zu den Knobelaufgaben für die Oberstufe
Juni-August 2005

Aufgabe 1

antiker Saal

Es sind sehr schöne Überlegungen mit Hilfe von Primfaktorzerlegungen erfolgreich eingesandt worden. Die Lösung ist aber auch auf diese Weise zu finden: Nennen wir die Länge der Wand mit der Brokattapete b, die der Wand mit dem Gobelin g, die Höhe des Saales h. Dann gilt

$$h^2 = \frac{b \cdot h \cdot g \cdot h}{g \cdot b} = \frac{17376 \cdot 5376}{10136} = 9216 = 96^2$$

$$g^2 = \frac{g \cdot h \cdot g \cdot b}{h \cdot b} = \frac{5376 \cdot 10136}{17376} = 3136 = 56^2$$

$$b^2 = \frac{g \cdot b \cdot b \cdot h}{g \cdot h} = \frac{10136 \cdot 17376}{5376} = 32761 = 181^2$$

Der Saal ist also 18,1m lang, 5,6m breit und 9,6m hoch.

Aufgabe 2

Kryptogramm

Erkenntnis (1): Die Ziffern E, I, N und S müssen wegen der fünfstelligen Produkte größer als 1 sein.

a) Von den Endungen auf S ausgehend kommen für S nur die Ziffern 0, 1, 5, 6 in Frage, wovon 0 bzw. 1 wegen der ersten Erkenntnis entfallen. Wenn wir als 1. Fall S=5 (als 2. Fall S=6) annehmen, dann haben wir einiges zu knobeln! –

b) Der Ansatz EINS EINS=ABCDEINS für geeignete Ziffern A, B, C, D führt zu EINS·(EINS-1)=ABCD·10000 führt ebenfalls zu enormer Knobelei.

c) Nun ein Verfahren zur schrittweise Ermittlung der Ziffern: Wir beachten (1) und (2: geltende Ziffern der Zwischenrechnung). Sei zunächst S=6. Daraus ergibt sich folgende Überlegung zur Ermittlung der Zehnerziffer: Für natürliche Zahlen a, b lässt sich EINS (im Dezimalsystem) schreiben als EINS= (100a+10N+6). Daraus muss gefolgert werden können

$$EIN6^2 = (100a + 10N + 6)^2 = 100b + 10N + 6$$

(Das Quadrat soll auf N6 enden!)
Nach Ausmultiplizieren und Äquivalenzumformungen erkennen wir: Die Gleichung kann nur erfüllt werden, wenn 110N+30 einen vollen Hunderter ergibt; das ist nur der Fall für N=7.

$$EI76^2 = (1000a + 100 \cdot I + 76)^2 = 1000b + 100 I + 76$$

(Das Quadrat muss auf 76 enden!)
Diese Gleichung kann nur erfüllt werden, wenn 15200 I + 5700 ein Vielfaches von 1000 ergeben; das gilt nur für I = 3. Dieses Verfahren -entsprechend fortgesetzt- liefert E = 9. mit EINS=9376 haben wir eine Lösung gefunden.
Jetzt fehlt noch die Überlegung mit S=5.
Da fängt man mit

$$EIN5^2 = (100a + 10N + 5)^2 = 100b + 10N + 5$$

(Das Quadrat endet auf N5!) Äquivalenzumformungen zeigen schließlich, dass 90N+20 ein Vielfaches von 100 ergeben muss; das liefert N=2. Fortsetzung des Verfahrens ergibt 625 als letzte drei Ziffern. Dann zeigt sich, dass jeder vorgesetzte Tausender (für E) –quadriert- im Ergebnis auf „0625“ endet. Einzig möglich wäre also E=0, was aber (1) widerspricht. Es bleibt also bei der einzigen Lösung EINS=9376.

Aufgabe 3

Gartenteilung

a) DE halbiert den Umfang; denn es gilt 14,00m + 14,00m = 28,00m für den Außenzaun des oberen Gartens und 19,80m + 19,80m + 16,40 – 14,00m – 14,00m = 28,00m für den unteren.

b) DE halbiert – im strengen Sinne – nicht die Fläche; denn die Verhältnisse der Flächen (z.B. kleines Dreieck zum großen) verhalten sich wie die Quadrate über einander entsprechenden Seiten.

$\overline{CD}^2 \overline{CA}^2$ =19600 **:** 39204 = 1 **:** 2,00020408… (Praktisch gesehen wäre dieser Fehler im Allgemeinen vernachlässigbar klein.)