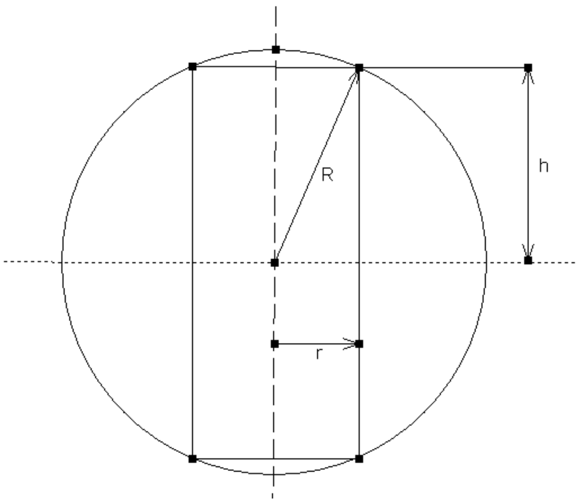
Mathetreff: Lösungen zu den Knobelaufgaben für die Oberstufe September-Oktober 2005

Aufgabe 1

Der Kunstschmied



Folgende Bezeichnungen werden gewählt: R: Radius der Kugel, r: Radius der zylindrischen Bohrung, h: halbe Länge der Bohrung und H = R – h Höhe der wegfallenden Kugelkappe (Kugelkalotte). Mit mit Vx wird das gesuchte Restvolumen der Kugel, mit Vv das Volumen der Vollkugel, mit Vz das Volumen des Zylinders und mit Vk das Volumen der Kalotte bezeichnet.
Dann gilt Vx=Vv–Vz–2Vk .
Mit Hilfe der folgenden Gleichungen, die man Sinnvollerweise einer Formelsammlung entnimmt erhält man:

$$V_v = \frac{4}{3}\pi R^3,\quad V_z = \pi r^2 2h,\quad V_k = \pi H^2(R - \frac{H}{3})$$

Setzt man diese Gleichungen in Vx=Vv–Vz–2Vk ein, so erhält man (*)

$$V_x = \frac{4}{3}\pi R^3 - \pi r^2 2h - 2\pi H^2(R - \frac{H}{3})$$

Aus der Skizze erkennt man den Zusammenhang zwischen R, r, und h

$R^2 = r^2 + h^2$.

Mit Hilfe dieses Zusammenhangs und H = R – h eliminiert man r und H in (*). Man erhält nach einigen Umformungsschritten

$$V_x = \frac{4}{3}\pi h^3$$

Mit h = 6 mm erhält man etwa 905 mm³ für das Volumen der Restkugel.

Aufgabe 2

Das Gesellenstück

Seien x, y, z die Maßzahlen der Kantenlängen (in cm) eines solchen zusammengesetzten Quaders, so gilt x, y und z sind natürliche Zahlen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $0<x \le y \le z$. Die Anzahl der Kiefernholzflächen ist k = 2(xy + xz + yz).
Die Anzahl aller Würfelflächen beträgt 6xyz. Da ein Drittel aller Würfelflächen aus hellem Kiefernholz sein soll, muss die Gleichung
xy + xz + yz = xyz erfüllt sein. Daraus ergibt sich:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1 \;; \qquad (1)$$

Es muss damit auch gelten, dass x gleich kleiner 3 ist, da wenn x>3 wäre, 1/x größer als 1/y bzw. 1/z wäre, was dann zu einem Widerspruch führen würde.
Auf der anderen Seite muss x>1 sein, weil sonst die obige Bedingung (1) nicht erfüllt würde.

Für x = 2 wird aus (1): $\frac{1}{2}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$

und damit $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}$

Hier muss y größer als 2 aber kleiner gleich 4 sein. Für y = 3 ergibt sich z = 6 und für y = 4 ergibt sich z = 4.
Für x = 3 ergeben sich mach dem selben Muster y = 3 und z = 3.
Es ergeben sich demzufolge drei Lösungen.
Für den Quader mit x = y = z = 3 werden n = 3*3*3 = 27,
für den zweiten Quader mit x = 2, y = z = 4 werden n = 2*4*4 = 32 und für den dritten Quader mit x = 2, y = 3 und z = 6 werden
n = 2*3*6 = 36 Einheitswürfel benötigt.
Die gesuchten Anzahlen der Einheitswürfeln n sind also 27, 32 und 36.

Aufgabe 3

Pilze sammeln

x in kg sei die Masse der gesammelten Pilze, darunter sollen 0,85x kg Wasser sein. Die trockenen Pilze wiegen (x–15)kg, darunter sind (0,85x–15)kg Wasser, welches 40% von der Gesamtmasse bildet. Also gilt:

$$\frac{0{,}85\,x-15}{x-15}=\frac{40}{100}=\frac{2}{5}$$

Daraus folgt x = 20kg. Also hatten Annett und Gerold zusammen 20 kg Pilze gesammelt.