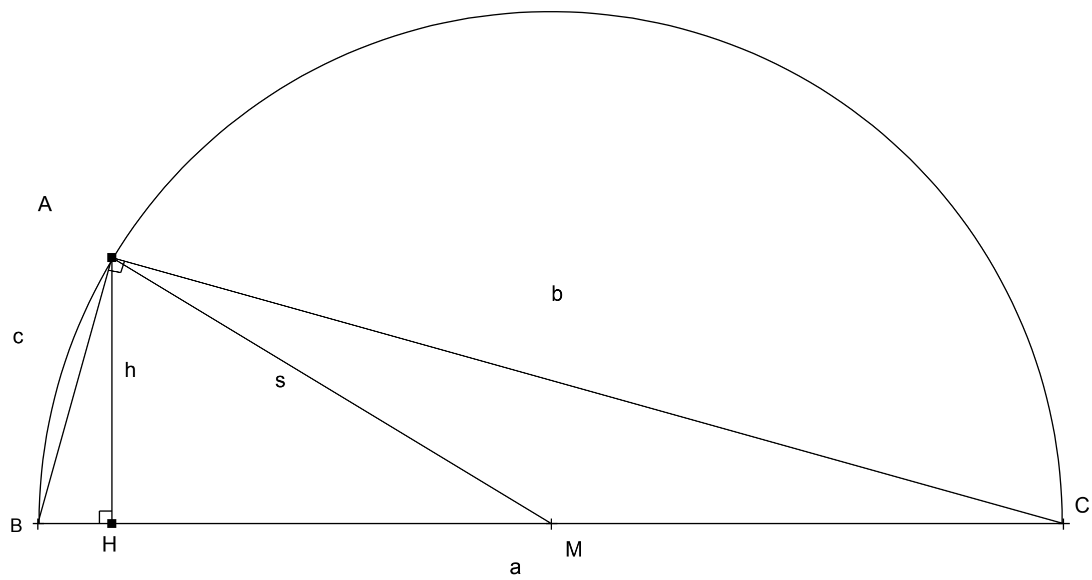
Mathe-Treff: Knobelaufgaben für die Oberstufe
Januar – März 2006
Lösungen

Zu Aufgabe 1 **Dreiecksfragment?**
Skizze zum Einstieg in das Problem:



Für s als Länge der Seitenhalbierenden gilt in diesem Falle s = r = $\frac{a}{2}$, r Radius des Thaleskreises.

Nach Aufgabenstellung muss gelten: $\frac{a}{2} = s = \sqrt{bc} \Leftrightarrow \frac{a^2}{4} = s^2 = bc \Leftrightarrow \frac{\frac{a}{4}}{c} = \frac{b}{a} (*)$

Im Dreieck ABC ist a die Hypotenuse und b (größte) Kathete. Im Dreieck BHA ist c die Hypotenuse und h (größte) Kathete. Wenn h = $\frac{a}{4}$ gewählt wird, sind die rechtwinkligen Dreiecke ähnlich und (*) ist erfüllt.
Für die Konstruktion zeichne man die Parallele zu BC im Abstand $\frac{a}{4}$, die den Thaleskreis über $\overline{BC}$ in zwei Punkten schneidet; man bezeichne einen von diesen mit A und zeichne $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$. (Fertig)

Zu Aufgabe 2 **Traumquader**
Zur Verfügung stehen 360cm für die Kanten und 54cm für die Raumdiagonale.
a) Für die Kantenlängen a, b, c gilt 4a + 4b +4c = 360 ⇔ a + b + c = 90 **(1)**

$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca = 8100$ **(2)**

Für die Diagonalenlänge d gilt d = $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 54$ **(3)**

$\Leftrightarrow d^2 = a^2 + b^2 + c^2 = 2916$ **(4)**

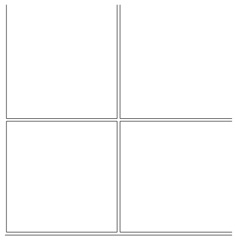
(2)-(4) liefert **(5)** 2ab + 2bc + 2ca = 5184**,** das Maß der Oberfläche in cm^2.

b) Da 5184 = $2^6 \cdot 3^4$ gilt, lohnt sich das systematische Probieren mit Teilern.
Es gibt tatsächlich (mindestens) einen solchen Quader!

a	b	90 - a - b	$a^2+b^2+(90-a-b)^2$ Ziel 54·54 = 2916	2(ab + bc + ca) Ziel 5184
30	30	30	2700	5400
		ggg		
36	**36**	**18**	**2916**	**5184**
40	32	18	2948	6312

Zu Aufgabe 3 **Münzwurf**

Die 2-Ct-Münze wird mit einem Durchmesser von 18,75mm (vergleichsweise 5-Ct-Münze: 21,25mm und 1-Ct-Münze: 16,25mm) hergestellt.



Wenn die Münze nicht auf dem Rand liegen soll, muss ihr Mittelpunkt als Abstand von den Rändern jeweils mindestens die Hälfte vom Radius entfernt liegen. Es verbleibt eine Fläche von $(34\text{-}2\cdot\frac{1}{2}\cdot 18{,}75)^2\ \mathrm{cm}^2 =$ 232,5625 cm^2, die für die Position des Mittelpunktes „günstig“ ist. Wegen der beliebigen Wiederholung des Musters werden (z.B.) der linke und der untere Rand berücksichtigt für einen möglichen Versuchsausgang, das ist eine Fläche von $(34+2)^2\mathrm{cm}^2 = 1296\mathrm{cm}^2$.

Die Wahrscheinlichkeit eines für Paula günstigen Versuchsausgangs ist sehr gering mit P(2Ct für Paula) = 232,5625 : 1296 = 3721 : 20736 $\approx 17{,}9\%$

Darauf wird sich Paula nicht einlassen. Es kommt nur eine kleinere Münze in Betracht.

P(1Ct für Paula) = $(34-2\cdot\frac{1}{2}\cdot 16{,}25)^2 : 1296$ = 315,0625 : 1296 $\approx 24{,}3\%$

Auch diese Wahrscheinlichkeit ist weit von 0,5 entfernt; deshalb sollte sich Paula überhaupt nicht auf diese Art des Auslosens einlassen.