Mathetreff: Lösungen zu den Knobelaufgaben für die Gymnasiale Oberstufe
Januar – Februar 2007

Aufgabe 1

Zum Jahresanfang

Eine mögliche Lösung lautet:
$(3+1\cdot 4\cdot 5\cdot \{2+7+8-6\})\cdot 9 = 2007$

Aufgabe 2

Flächen und Dreiecke

Im Dreieck ABC gilt:

$\cos 60° = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{1}{2}$, also $a^2+bc = b^2+c^2$. (1)

Nun gilt:

$A_1 + A_2 = \frac{1}{2} bc \sin 60° + \frac{1}{4} a^2\sqrt{3}$

$= \frac{1}{4} bc\sqrt{3} + \frac{1}{4} a^2\sqrt{3},$

$= \frac{1}{4}\sqrt{3}(a^2+bc).$ Nach (1) gilt aber auch

$A_1 + A_2 = \frac{1}{4}\sqrt{3}(b^2+c^2)$ und

$A_3 + A_4 = \frac{1}{4}\sqrt{3}(b^2+c^2)$ und somit

$A_1 + A_2 = A_3 + A_4$

Aufgabe 3

Schon wieder quadratische Funktionen

Es muss das Gleichungssystem
(1) $f(p) = p^2 + pp + q = 0$
(2) $f(q) = q^2 + pq + q = 0$
gelten.

Umformungen ergeben :
(1) $2p^2+q = 0$
(2) $q(q+p+1) = 0$

Hier führt eine Fallunterscheidung zum Ziel : 1. Fall $q = 0$ und 2. Fall $q \neq 0$.
1. Fall: $q = 0 \Rightarrow p = 0$, $f(x) = x^2$, Probe!
2. Fall: $q \neq 0 \Rightarrow q = -(p+1)$ aus (2)

$\Rightarrow 2p^2 - p - 1 = 0$ L={(p|q) mit (1|-2), (- 0,5| - 0,5)}
also lauten die Lösungen insgesamt (Probe!)
$f(x) = x^2$ und $f(x) = x^2 + x - 2$ und $f(x) = x^2 - 0{,}5x - 0{,}5$