# Mathetreff: Lösungen zu den Knobelaufgaben
# Knobelaufgaben für die Klassen 9 und 10
# März –Mai 2007

### Aufgabe 1

### Hasenpause

Fall 1: Die Sitzbänke stehen so, das sie eindeutig voneinander abgetrennt sind.
Unanhängig davon, wo sich nun der Hase, der sich zuerst hinsetzt, Kleks, hinsetzt, bleiben 5 Plätze für Pauli übrig, doch nur einer befindet sich neben Kleks. Also beträgt die Wahrscheinlichkeit das die beiden Hasen nebeneinander sitzen 1/5.

Fall 2: Die Bänke stehen nebeneinander in einer Reihe.
Wir müssen nun unterscheiden:

a) Kleks setzt sich auf einen der äußeren Plätze, es gibt noch 5 Plätze für Pauli, aber es befindet sich wieder nur einer davon direkt neben Kleks, die Wahrscheinlichkeit das die beiden Hasen nebeneinander sitzen 1/5.

Kleks setzt sich nicht auf einen der äußeren Plätze, es bleiben zwar noch 5 mögliche Plätze für Pauli übrig, aber davon befinden sich 2 neben Kleks' Sitzplatz. Folglich beträgt die Wahrscheinlichkeit des Nebeneinandersitzens hier 2/5.

### Aufgabe 2

### Quadratzahlen überall

Die vier aufeinanderfolgenden Zahlen werden mit n, (n+1), (n+2) und (n+3) bezeichnet.
Zu zeigen ist:

$$n*(n+1)*(n+2)*(n+3)+1=x^2$$

Es gilt:

$$n*(n+1)*(n+2)*(n+3)+1$$
$$=(n^2+n)*(n^2+3n+2n+6)+1$$
$$=(n^2+n)*(n^2+5n+6)+1$$
$$=(n^4+5n^3+6n^2+n^3+5n^2+6n)+1$$
$$=(n^4+6n^3+11n^2+6n)+1$$
$$=(n^2+3n+1)^2$$

Damit ist gezeigt, dass das Produkt von vier aufeinanderfolgenden Zahlen immer eine Quadratzahl ist.

### Aufgabe 3

### Gummibärchenneid beim Osterfest

X ist die Gesamtmenge der Gummibären; es gilt:

$$(1)x=4y+1$$
$$(2)3y=4z+1$$
$$(3)3z=4a+1$$
$$(4)3a=4b+1$$
$$(5)3b=4c+1$$

Nun kann man diese Gleichungen von (5) ausgehend lösen:

$$b = \frac{4c + 1}{3}$$

$$a = \frac{4 * \frac{4c+1}{3} + 1}{3} = \frac{\frac{16c+4}{3} + 1}{3} = \frac{16c+4}{9} + \frac{1}{3} = \frac{16c+7}{9}$$

$$z = \frac{4 * \frac{16c+7}{9} + 1}{3} = \frac{64c+28}{27} + \frac{1}{3} = \frac{64c+37}{27}$$

$$y = \frac{4 * \frac{64c+37}{27} + 1}{3} = \frac{256c+148}{81} + \frac{1}{3} = \frac{256c+175}{81}$$

$$x = 4 * \frac{256c+175}{81} + 1 = \frac{1024c+700}{81} + 1$$

$$x - 1 = \frac{1024c+700}{81}$$

Alle Variablen stehen für ganze Zahlen, da die Kinder nur ganze Gummibärchen gewonnen haben.
Folglich muss gelten:

$$1024 * c + 700 \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 81)$$

$$\Leftrightarrow \; 52 * c + 52 \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 81)$$

$$\Leftrightarrow \; 52 * c \equiv 29 (\mathrm{mod}\, 81)$$

Nun ist nur noch die kleinste Zahl zu finden, deren 52faches beim Teilen durch 81 einen Rest von 29 lässt.
Die Zahl kann nun mit Hilfe einer Exceltabelle bestimmt werden, wobei in der ersten Spalte die Zahlen von 1 bis n durchlaufen lasse, in der 2. Spalte betrachte ich das 52fache der ersten Spalte, und in der 3. Spalte stehen die Zahlen der 2. Spalte um 29 vermindert.
Die 3. Spalte teile ich nun durch 81 und die Ergebnisse stehen in der 4. Spalte – und die erste Zahl bei der das Ergebnis in der 4. Spalte ganz ist, ist 80. Die Kinder erhielten also bei der letzten Aufteilung 80 Gummibärchen (wenn man von der kleinsten Zahl, die alle Bedingungen erfüllt, ausgeht) und hatten insgesamt mindestens (1024*80+700)/81+1=1021Gummibärchen gewonnen.
Geht man nun davon aus, dass die Kinder große Gummibärchen der Größe 1cm*2cm*1cm gewonnen haben, so hat die Dose ein Mindestvolumen von 1021*1cm*2cm*1cm=2042cm³.
Ist die Dose ein Zylinder, dessen Volumen $V = \pi r^2 h$ beträgt – dann könnte die Dose eine Höhe von 30cm und einen Durchmesser von 10cm haben.