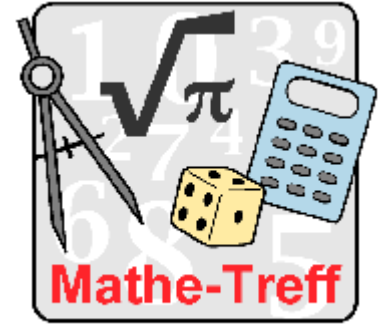


Mathetreff: Lösungen zu den Knobelaufgaben
Knobelaufgaben für die Oberstufe
März –Mai 2007



Aufgabe 1

Eier färben

Es soll nun angegeben werden wie die Nester aussehen.

Sei x nun die Anzahl der roten Eier. Dann sind $x+1$ Eier orange, $x+3$ Eier pink und $x+4$ Eier violett gefärbt. Insgesamt gibt es also $x+x+1+x+3+x+4=4x+8$ Eier.

In jedem der drei Nester sind gleich viele Eier, und zwar $\frac{4x+8}{3} = x + \frac{x+8}{3}$ Eier.

In jedem Nest gibt es nun rote, orange, pinke und violette Eier.

Bezeichnet man nun die Anzahl der roten Eier im ersten Nest mit a_r , die im zweiten Nest mit b_r und die im dritten Nest mit c_r . Dann gibt es insgesamt $a_r+b_r+c_r=x$ rote Eier. Auch müssen sich nun im ersten Nest b_r Eier einer anderen und c_r Eier einer weiteren Farbe befinden.

Von der 4. Farbe gibt es folglich $x + \frac{x+8}{3} - x = \frac{x+8}{3}$ Eier.

Analog lassen sich nun die Anzahlen der orangen, pinken und violetten Eier ebenso ausdrücken und die Anzahl der Eier der 4. Farbe, die jedes mal eine andere ist, berechnen:

$$x + \frac{x+8}{3} - (x+1) = 1 + \frac{x+2}{3} = \frac{x+5}{3} \text{ und}$$

$$x + \frac{x+8}{3} - (x+3) = -1 + \frac{x+2}{3} = \frac{x-1}{3} \text{ und}$$

$$x + \frac{x+8}{3} - (x+4) = -2 + \frac{x+2}{3} = \frac{x-4}{3}$$

Nun kennt man also alle Anzahlen der Eier in einem Nest in Abhängigkeit von den roten Eiern. Es gilt:

$$\frac{x+8}{3} > \frac{x+5}{3} > \frac{x-1}{3} > \frac{x-4}{3}$$

Der Aufgabenstellung geht hervor, dass die Anzahl der Eier von der Farbe, die am meisten vorkommt in einem Nest immer doppelt so groß ist wie die, die am wenigsten vorhanden ist.

Damit ist

$$\frac{x+8}{3} = 2 * \frac{x-4}{3}$$

$$\Leftrightarrow x = 16$$

Und es wurden demnach 16 Eier rot, 17 Eier orange, 19 Eier pink und 20 Eier violett gefärbt.

Eingesetzt ergeben sich nun die Eieranzahlen 4,5,7,8 pro Nest. Bekannt ist des weiteren, dass es 16 rote Eier gibt, die sich in drei Nestern befinden. Es gilt: $16 = 7+5+4$, $17=8+4+5$, $19=8+7+4$ und $20=8+7+5$. Bezeichnen wir das Nest mit den 4 roten Eiern im folgenden als erstes, das mit den 5 roten als zweites und das mit den 7 roten Eiern als drittes.

Nun kann man folgende 4. Möglichkeiten der Verteilung angeben, die alle Bedingungen erfüllen:

Eierfarbe	Nest 1 2 3	Nest 1 2 3	Nest 1 2 3	Nest 1 2 3
Rot	4 5 7	4 5 7	4 5 7	4 5 7
Orange	8 4 5	5 8 4	5 4 8	5 4 8
Pink	7 8 4	7 4 8	7 8 4	8 7 4
Violett	5 7 8	8 7 5	8 7 5	7 8 5

Aufgabe 2

Dreieck im Quadrat

Der Flächeninhalt des sich im Quadrat befindenden Dreiecks kann nicht größer werden, als halb so groß wie das Quadrat, weil das geometrisch nicht möglich ist. Somit müssen zwei gegenüberliegende Eckpunkte des Quadrats verbunden werden um das Dreieck mit dem maximalen Flächeninhalt zu erhalten.

Gesucht ist also die Länge x , bei der der Flächeninhalt des dem Quadrat einbeschriebenen Dreieck maximal wird, das heißt die verbleibende Fläche des Quadrates wird minimal. Dieser verbleibende Flächeninhalt lässt sich durch die Funktion $A(x)$ ausdrücken:

$$A(x) = (5 - x) * 5 + \frac{1}{2} * \sqrt{\frac{1}{2} * x^2} * \sqrt{2} * x$$

$$\Leftrightarrow A(x) = \frac{1}{2} x^2 - 5x + 25$$

An der Stelle, wo ein Minimum von $A(x)$ vorliegt, wird der Flächeninhalt des Dreiecks maximal. Es gilt also dieses Minimum zu bestimmen.

Notwendige Bedingung: $A'(x)=0$

$$A'(x)=x-5$$

$$0 = x - 5$$

$$\Leftrightarrow x = 5$$

Hinreichende Bedingung: $A'(x)=0 \wedge A''(x) \neq 0$

$$A''(x)=1$$

$$A''(5) \neq 0$$

Somit ist für $x=5$ sowohl die hinreichende als auch die notwendige Bedingung erfüllt. Das Dreieck ist also die Hälfte des Quadrats, bestehend aus zwei Seiten des Quadrats und der zugehörigen Diagonalen.

Aufgabe 3

Gummibärchenleid beim Osterfest

X ist die Gesamtmenge der Gummibären; es gilt:

$$(1) x = 5y + 1$$

$$(2) 4y = 5z + 1$$

$$(3) 4z = 5a + 1$$

$$(4) 4a = 5b + 1$$

$$(5) 4b = 5c + 1$$

$$(6) 4c = 5d + 1$$

Nun kann man diese Gleichungen von (6) ausgehend lösen:

$$c = \frac{5d+1}{4}$$

$$b = \frac{5 \cdot \frac{5d+1}{4} + 1}{4} = \frac{\frac{25d+5}{4} + 1}{4} = \frac{25d+5}{16} + \frac{1}{4} = \frac{25d+9}{16}$$

$$a = \frac{5 \cdot \frac{25d+9}{16} + 1}{4} = \frac{\frac{125d+45}{16} + 1}{4} = \frac{125d+61}{64}$$

$$z = \frac{5 \cdot \frac{125d+61}{64} + 1}{4} = \frac{\frac{625d+305}{64} + 1}{4} = \frac{625d+369}{256}$$

$$y = \frac{5 \cdot \frac{625d+369}{256} + 1}{4} = \frac{\frac{3125d+1845}{256} + 1}{4} = \frac{3125d+2101}{1024}$$

$$x = 5 \cdot \frac{3125d+2101}{1024} + 1 = \frac{15625d+10505}{1024} + 1$$

$$x - 1 = \frac{15625d+10505}{1024}$$

Alle Variablen stehen für ganze Zahlen, da die Kinder nur ganze Gummibärchen gewonnen haben.

Folglich muss gelten:

$$15625 \cdot d + 10505 \equiv 0 \pmod{1024}$$

$$\Leftrightarrow 265 \cdot d + 265 \equiv 0 \pmod{1024}$$

$$\Leftrightarrow 265 \cdot d \equiv 759 \pmod{1024}$$

Nun ist nur noch die kleinste Zahl zu finden, deren 265faches beim Teilen durch 1024 einen Rest von 759 lässt.

Die Zahl habe ich nun mit Hilfe einer Exceltabelle bestimmt, wobei ich in der ersten Spalte die Zahlen von 1 bis n durchlaufen lasse, in der 2. Spalte betrachte ich das 265fache der ersten Spalte, und in der 3. Spalte stehen die Zahlen der 2. Spalte um 759 vermindert.

Die 3. Spalte teile ich nun durch 1024 und die Ergebnisse stehen in der 4. Spalte – und die erste Zahl bei der das Ergebnis in der 4. Spalte ganz ist, ist 1023. Die Kinder erhielten also bei der letzten Aufteilung 1023 Gummibärchen (wenn man von der kleinsten Zahl, die alle Bedingungen erfüllt, ausgeht) und hatten insgesamt mindestens $(15625 \cdot 1023 + 10505) / 1024 + 1 = 15621$ Gummibärchen gewonnen.

Geht man nun davon aus, dass die Kinder große Gummibärchen der Größe $1\text{cm} \cdot 2\text{cm} \cdot 1\text{cm}$ gewonnen haben, so hat die Dose ein Mindestvolumen von $15621 \cdot 1\text{cm} \cdot 2\text{cm} \cdot 1\text{cm} = 31242\text{cm}^3$.

Das Volumen eines Zylinders beträgt $V = \pi r^2 h$ - die Dose könnte also eine Höhe von 25cm und einen Durchmesser von 40cm haben.