Mathetreff: Lösungen zu den Knobelaufgaben für die Stufen 11 bis 13
Juni – August 2007

Aufgabe 1

Dreieck und Kreise

Beziehung der Radien von Um- und Inkreis gleichseitiger Dreiecke für gleichseitige Dreiecke kann der Skizze entnommen werden
Im gleichseitigen Dreieck fallen die Schnittpunkte der Mittelsenkrechten (Umkeismittelpunkt), der Winkelhalbierenden (Inkreismittelpunkt), der Höhen und der Seitenhalbierenden (Schwerpunkt) in einem Punkt zusammen. Der Schwerpunkt teilt die Seitenhalbierenden im Verhältnis $\frac{2}{3}:\frac{1}{3}=2:1$. Der dritte Teil der Höhe ist der Inkreisradius groß – doppelt so groß der Umkreisradius.
Wenn s die Länge der Dreiecksseite ist, dann gilt für die Höhe $h=\frac{s}{2}\sqrt{3}$, den Radius des Inkreises $r_i=\frac{1}{3}h=\frac{s}{6}\sqrt{3}$, den Radius des Umkreises $r_u=\frac{2}{3}h=\frac{2}{3}r_i=\frac{s}{3}\sqrt{3}$ und für das Verhältnis der Umfänge $\frac{2\pi r_u}{2\pi r_i}=\frac{r_u}{r_i}=2=2:1$.

Aufgabe 2

Teilbarkeit

Zu zeigen ist die Gültigkeit (in IN) der Aussage A(n): $24 \mid n^4-6n^3+23n^2-18n+24$.

Ein Versuch mithilfe der Polynomdivision A(n) : (n-24) misslingt. Dann bietet sich das Beweisverfahren durch vollständige Induktion an:

Induktionsverankerung für n = 0: A(0) : 24 ist Teiler von 24. (Wahre Aussage)
Hier ein (überflüssiger) Versuch mit n = 1: A(1): 24 teilt 1 – 6 + 23 – 18 + 24. (Wahre Aussage)

Induktionsannahme A(k) : $24 \mid k^4-6k^3+23k^2-18k+24, \text{natürliches} k.$

Induktionsbehauptung A(k+1) :
$24 \mid (k+1)^4-6(k+1)^3+23(k+1)^2-18(k+1)+24, \text{gilt für natürliches} k.$

$$(k+1)^4-6(k+1)^3+23(k+1)^2-18(k+1)+24=$$
$$\left[k^4+4k^3+6k^2+4k+1\right]-\left[6k^3+18k^2+18k+6\right]+\left[23k^2+46k+23\right]-[18k-18]+24=$$
$$\left[k^4-6k^3+23k^2-18k+24\right]+\left[4k^3-12k^2+32k\right]$$

Die erste eckige Klammer ist nach Induktionsvoraussetzung ein Vielfaches von 24; es bleibt noch die zweite eckige Klammer zu untersuchen: $4k^3-12k^2+32k=4k(k^2-3k+8)$
Der gefundene Faktor 4 reicht noch nicht; denn die Primfaktorzerlegung von 24 erfordert die Teilbarkeit durch 8 und 3. Weil k sowohl gerade als auch ungerade sein kann, muss die Klammer den notwendigen Faktor 2 liefern. In der Form k(k-3)+8 einen Term, der stets gerade Zahlen liefert; ist k gerade bzw. ungerade, dann ist k-3 ungerade bzw. gerade; damit ist das Produkt gerade, und die Summe gerader Zahlen ist wieder eine gerade Zahl. Folglich enthält der Term in der zweiten eckigen Klammer den Faktor 8.
Es bleibt noch übrig der Nachweis des Faktors 3; $3 \mid 4k^3-12k^2+32k=4k(k^2-3k+8)$. Nun muss k in drei Formen berücksichtigt werden a) k = 3m, b) k=3m+1, c) k=3m+2, natürliches m.
zu a) trivial, die Existenz des Faktors 3 ist evident.
zu b) $4k(k^2-3k+8)=4(3m+1)\left[(3m+1)^2-3(3m+1)+8\right]=4(3m+1)\cdot 3\cdot\left[3m^2+m+2\right]$
zu c) $4k(k^2-3k+8)=4(3m+2)\left[(3m+2)^2-3(3m+2)+8\right]=4(3m+2)\cdot 3\cdot\left[3m^2-m+2\right]$

Der Faktor 24 ist also in der zweiten eckigen Klammer und damit in der Summe beider eckiger Klammern vorhanden. Die Induktionsfolgerung ist gewährleistet. Die Aussage gilt folglich für alle natürlichen Zahlen incl. Null.

Eine Alternativ-Lösung von J.K. aus Leverkusen:

Zu Zeigen ist, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt: $24 | n^4 - 6n^3 + 23n^2 - 18n + 24$

Bekanntlich gilt: 24|24. Folglich kann man den Term auf $24 | n^4 - 6n^3 + 23n^2 - 18n$ vereinfachen. Des weiteren gilt: 24=3*8. Es genügt also zu zeigen, dass der Term, unabhängig davon was für ein n wir einsetzen immer von 3 und 8 geteilt wird.
Nun hilft die Restklassenrechnung weiter: Jeder Summand des Terms und die Summe des Terms wird erst modulo 8 und dann modulo 3 betrachtet. Ist der Term insgesamt immer kongruent 0 modulo 8 bzw. modulo 3 so teilt auch 24 immer diesen Term.

mod 8		n4	-6*n³	+23n²	-18n	
	0	0	-0	+0	-0	=0
	1	1	-6	+7	-2	=0
	2	0	-0	+4	-4	=0
	3	1	-2	+7	-6	=0
	4	0	-0	+0	-0	=0
	5	1	-6	+7	-2	=0
	6	0	-0	+4	-4	=0
	7	1	-2	+7	-6	=0
mod 3	0	0	-0	+0	-0	=0
	1	1	-0	+2	-0	=0
	2	1	-0	+2	-0	=0

Daraus folgt das der obige Term für jedes natürliche n durch 24 teilbar ist.

Aufgabe 3

Münzwurf

Die 2-Ct-Münze wird mit einem Durchmesser von 18,75mm (vergleichsweise 5-Ct-Münze: 21,25mm und 1-Ct-Münze: 16,25mm) hergestellt.
Wenn die Münze nicht auf dem Rand liegen soll, muss ihr Mittelpunkt
als Abstand von den Rändern jeweils mindestens die Hälfte vom Radius entfernt liegen. Es verbleibt eine Fläche von $(34\text{-}2\cdot\frac{1}{2}\cdot 18{,}75)^2 \text{ cm}^2 =$

232,5625 cm^2, die für die Position des Mittelpunktes „günstig“ ist.
Wegen der beliebigen Wiederholung des Musters werden (z.B.) der linke und der untere Rand berücksichtigt für einen möglichen Versuchsausgang, das ist eine Fläche von $(34+2)^2\text{cm}^2 = 1296\text{cm}^2$.
Die Wahrscheinlichkeit eines für Paula günstigen Versuchsausgangs ist sehr gering mit P(2Ct für Paula) = 232,5625 : 1296 = 3721 : 20736 $\approx 17{,}9\%$

Darauf wird sich Paula nicht einlassen. Es kommt nur eine kleinere Münze in Betracht.
P(1Ct für Paula) = $(34 - 2\cdot\frac{1}{2}\cdot 16{,}25)^2 : 1296$ = 315,0625 : 1296 $\approx 24{,}3\%$

Auch diese Wahrscheinlichkeit ist weit von 0,5 entfernt; deshalb sollte sich Paula überhaupt nicht auf diese Art des Auslosens einlassen.