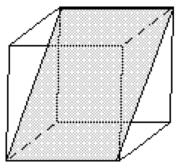
Mathetreff: Lösungen zu den Knobelaufgaben
Knobelaufgaben für die Klassen 9 und 10
September –Oktober 2007

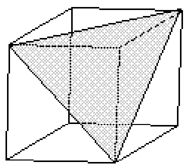
Aufgabe 1

Würfelschnitte

Diese Lösung stammt von Alexander Schuppert.



Die größte ebene rechteckige Schnittfläche durch einen Würfel geht von 2 nebeneinander liegenden oberen Ecken zu den 2 diagonal dazu liegenden unteren Ecken, wie eingezeichnet. Egal wie man das Rechteck kippt, die lange Seite kann nur kürzer werden. Deshalb ist dies das größtmögliche Rechteck. Es hat die Breite 1 (= Kantenlänge des Würfels) und die Länge $\sqrt{2}$ (Diagonale eines Quadrats mit Kantenlänge 1). Der Umfang ist deshalb $U = 2 + 2 \cdot \sqrt{2}$.



Das größte gleichseitige Dreieck in einem Würfel hat die Kantenlänge $\sqrt{2}$. Egal wie man das Dreieck kippt, die Seite kann nur kürzer werden. Deshalb ist dies das größtmögliche Dreieck. Sein Umfang beträgt $3 \cdot \sqrt{2}$.

Aufgabe 2

Poster

a)Dazu braucht man 2007 · 2 sec = 4014 Sekunden. Das entspricht
1 Stunde 6 Minuten 54 Sekunden.
Das Schreiben dauert also mehr als eine Stunde.
b)Würde man alle ein- bis dreiziffrigen Zahlen hinschreiben, bräuchte man 2889 Ziffern:
9 + 90 · 2 + 900 · 3 = 9 + 180 + 2700 = 2889.
Bildet man jedoch von 2007 und 189 die Differenz, so erhält man 1818. Der dritte Teil entspricht der Anzahl der geforderten dreiziffrigen Zahlen. Diese Zahl ist 606.
9 + 90 + 606 = 705
Die 2007. Ziffer auf dem Plakat ist also eine 5.
c)In den dreistellig geschriebenen Zahlen von 000 bis 999 kommen alle Ziffern gleich häufig vor, nämlich 300 Mal. Da alle führenden Nullen wegfallen, ist die Zahl der Nullen in diesem Bereich:
300 – 100 – 10 – 1 = 189.
Von 900 bis 999 kommen alle Ziffern 20 Mal und die neun 120 Mal vor.
Von 800 bis 899 kommen alle Ziffern 20 Mal und die acht 120 Mal vor.
Von 700 bis 799 kommen alle Ziffern 20 Mal und die sieben 120 Mal vor.
Im Bereich von 700 bis 705 kommt die sieben 6 Mal vor, die Zahlen eins bis sechs 1 Mal und die Null 7 Mal vor. Daraus folgt, dass die Null 136 Mal vorkommt und die geringste Anzahl aller Ziffern aufweist (siehe Tabelle).

0	300 – 100 – 10 – 1 - 20 – 20 – 20 + 7	= 136
1	300 – 20 – 20 – 20 + 1	= 241
2	300 – 20 – 20 – 20 + 1	= 241
3	300 – 20 – 20 – 20 + 1	= 241
4	300 – 20 – 20 – 20 + 1	= 241
5	300 – 20 – 20 – 20 + 1	= 241
6	300 – 20 – 20 – 20	= 240
7	300 – 20 – 20 – 120 + 6	= 146
8	300 – 20 – 20 – 120	= 140
9	300 – 20 – 20 – 120	= 140

d) Die Summe aller Ziffern beträgt somit:
$1 \cdot 241 + 2 \cdot 241 + \ldots .. + 9 \cdot 140 = 8457$

Aufgabe 3

Quadratsfläche

a)Zwei Punkte liegen auf einer Quadratseite. Die max Länge der Grundseite des Dreiecks ist dann 10cm, der Flächeninhalt $A \leq 50\,cm^2$.

b)Die Eckpunkte des Dreiecks EFG sind auf alle Seiten des Vierecks verteilt, und es sei A=E, F liegt auf BC und G auf CD. Dabei müssen zwei Punkte auf benachbarten Seiten und der dritte Punkt des Dreiecks in einer gegenüberliegenden Ecke des Quadrates liegen (wegen Maximalforderung).

Die Parallele zu AB durch F zerlegt das Quadrats in zwei Ebenen (Teilrechtecke), ebenso wie das ursprüngliche Dreieck in zwei Teildreiecke. Diese haben die gleiche Höhe wie die Teilrechtecke, haben aber wegen der kürzeren Grundseite einen Flächeninhalt, der kleiner ist als der halbe Flächeninhalt der Teildreiecke. Somit gilt für die Dreiecksfläche A: $A < 50\,cm^2$.

Für f = 7,3 cm, e = 5 cm und $\alpha = 30°$
folgt:
A= 7,3*5*0,5cm²*sin30°
A= 9,125 cm².