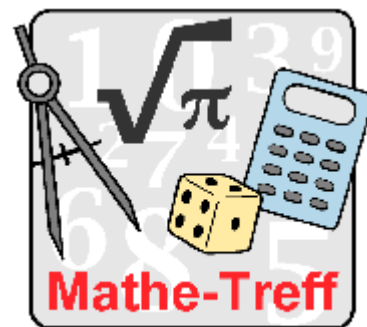


Mathetreff: Lösungen zu den Knobelaufgaben
Knobelaufgaben für die Oberstufe
September – Oktober 2007



Aufgabe 1

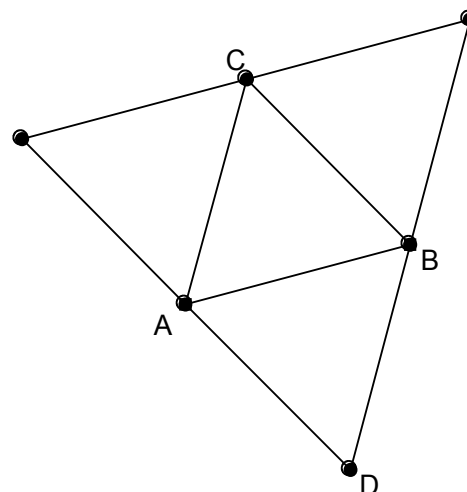
Tetraeder

a) Die Oberfläche besteht aus 4 Dreiecksseiten (deren Grundseite die Länge $g=1$ hat und deren Höhe $\sqrt{\frac{3}{4}}$ beträgt).

$$A_{\text{gesamt}} = 4 \cdot A_{\text{Dreiecksseite}} = 4 \cdot \frac{g \cdot h}{2} = 4 \cdot \frac{1 \cdot \sqrt{\frac{3}{4}}}{2} = 2 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{3} = \sqrt{3} < \frac{3}{2} \sqrt{3}$$

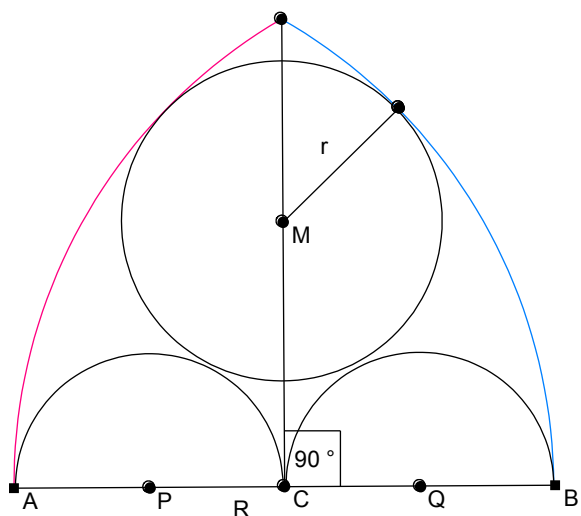
b) Das Netz ist ein (großes) Dreieck, dessen Grundseite die Länge $g=2$ hat und dessen Höhe $h = \sqrt{2^2 - 1}$ beträgt.

$$A_{\text{Dreieck}} = \frac{g \cdot h}{2} = \frac{2 \cdot \sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} < \frac{3}{2} \sqrt{3}$$



Aufgabe 2

Kirchenfenster



$$\overline{AB} = R; \overline{AP} = \frac{1}{4}R; \overline{CM} = h$$

$$\left(\frac{R}{4} + r\right)^2 = \left(\frac{R}{4}\right)^2 + h^2$$

$$h^2 = \left(\frac{R}{4} + r\right)^2 - \frac{R^2}{16}$$

$$(R - r)^2 = h^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2$$

$$R^2 - 2Rr + r^2 = \frac{R^2}{16} + \frac{1}{2}Rr + r^2 - \frac{R^2}{16} + \frac{R^2}{4}$$

$$\frac{3}{4}R^2 = 2\frac{1}{2}Rr$$

$$\frac{3}{10}R = r$$

Aufgabe 3

Vierecksfläche

zu zeigen:

$$A = 0,5 \cdot e \cdot f \cdot \sin \alpha$$

Beweis:

$$h_1 = f_1 \cdot \sin \alpha$$

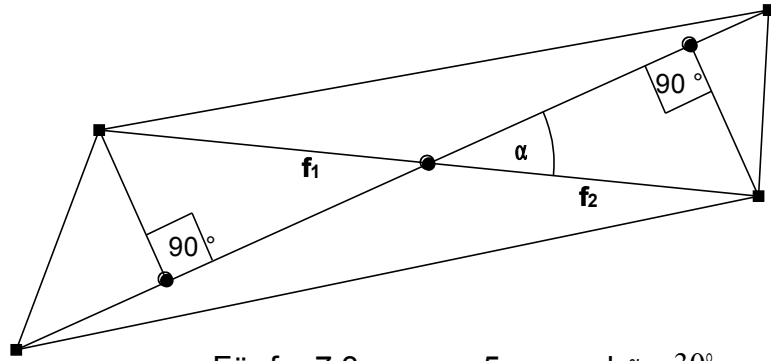
$$h_2 = f_2 \cdot \sin \alpha$$

$$A = 0,5 \cdot e \cdot f_1 \cdot \sin \alpha + 0,5 \cdot e \cdot f_2 \cdot \sin \alpha$$

$$A = 0,5 \cdot e \cdot (f_1 + f_2) \cdot \sin \alpha$$

$$A = 0,5 \cdot e \cdot f \cdot \sin \alpha$$

qed



Für $f = 7,3 \text{ cm}$, $e = 5 \text{ cm}$ und $\alpha = 30^\circ$ folgt:

$$A = 7,3 \cdot 5 \cdot 0,5 \text{ cm}^2 \cdot \sin 30^\circ$$

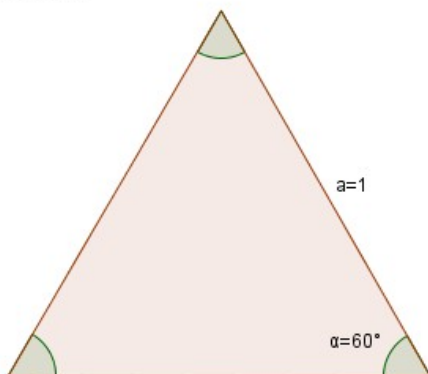
$$A = 9,125 \text{ cm}^2.$$

Lösungen von Johannes Busse, Jgst. 13:

Aufgabe 1:

Ein Tetraeder besteht aus vier gleichseitigen Dreiecken.

(0.93, 7.86)



Der Flächeninhalt eines Dreiecks ist allgemein

$$A_D = 0,5 \cdot \sin \alpha \cdot a^2 \text{ oder } A_D = 0,5 \cdot \sin 60^\circ \cdot 1.$$

Der Tetraeder besteht aus vier solchen Dreiecken, deshalb

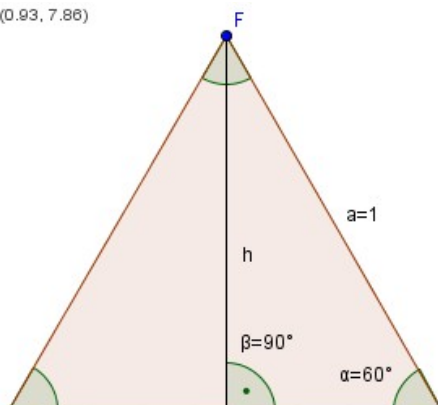
$$A_T = 0,5 \cdot \sin 60^\circ \cdot 4 = 2 \cdot \sin 60^\circ$$

$$A_T = \sqrt{3}.$$

Die Kantenlänge ist mit $a = 1$ gegeben. Da, das Dreieck gleichseitig ist, beträgt jeder Winkel 60° .

Eine andere Herleitung:

(0.93, 7.86)



Die Höhe h eines Dreiecks des Tetraeders kann durch den Pythagorassatz

$$a^2 = (0,5a)^2 + h^2 \text{ ausgerechnet werden.}$$

Umgestellt ergibt sich:

$$h = \sqrt{a^2 - (0,5a)^2}. \text{ Setzt man nun } a = 1 \text{ ein, so ist } h = \sqrt{0,75}.$$

Der Flächeninhalt des Dreiecks ist demnach: $A_D = 0,5 \cdot h \cdot a$ bzw.

$$A_D = 0,5 \cdot \sqrt{0,75} \cdot 1 \text{ und des Tetraeders: } A_T = 4 \cdot 0,5 \cdot h \cdot a \text{ bzw. } A_T = 4 \cdot 0,5 \cdot \sqrt{0,75} \cdot 1 = 2 \cdot \sqrt{0,75}$$

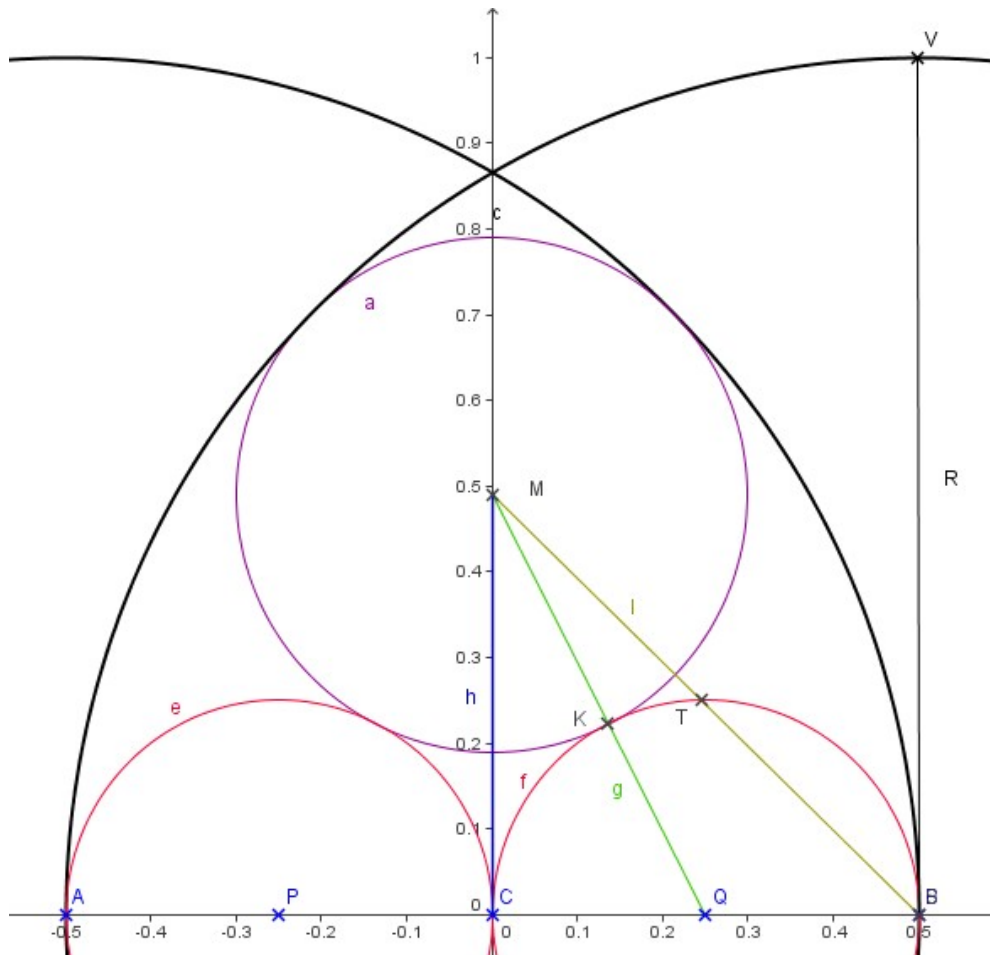
$$A_T = \sqrt{(2^2 \cdot 0,75)} = \sqrt{3}$$

$$\sqrt{3} < 1,5 \cdot \sqrt{3}$$

q.e.d

Der Flächeninhalt eines Tetraeders ist mit $\sqrt{3}$ definitiv kleiner als $1,5 \cdot \sqrt{3}$.

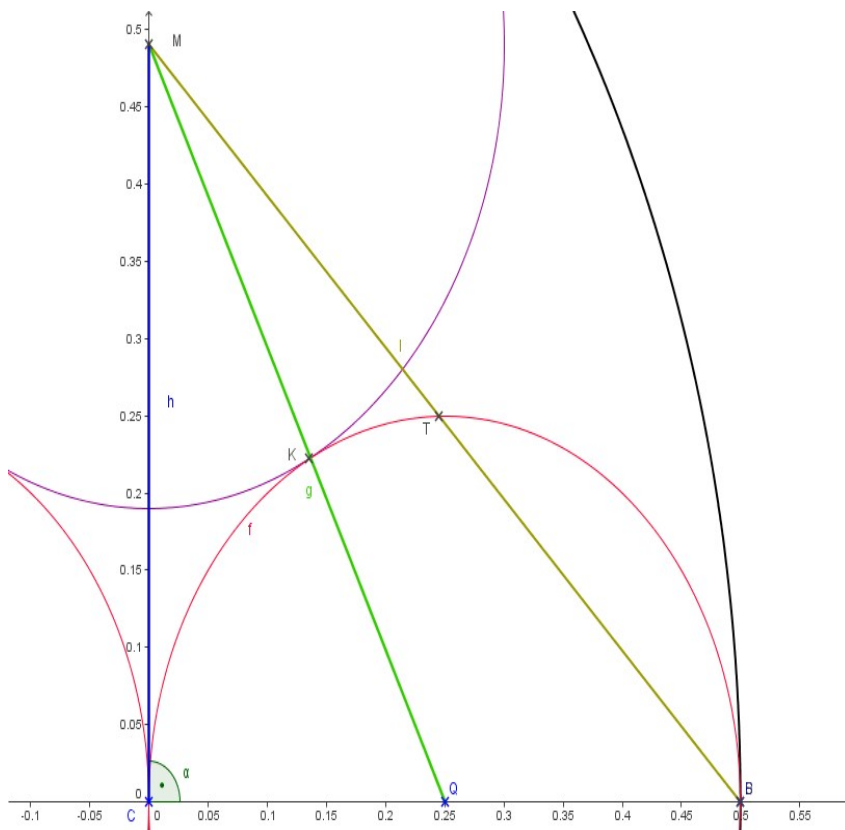
Aufgabe 2:



$$h^2 + (CQ)^2 = g^2$$

$$h^2 + (CB)^2 = l^2$$

Durch zeichnen der Strecken g (QM) und l (BM) bilden sich zwei rechtwinklige Dreiecke. Mit Pythagoras weiß man:



Außerdem kann man diese Beziehungen in den Skizzen ablesen:
 $(CQ) = \frac{1}{4} \cdot R$
 $(CB) = \frac{1}{2} \cdot R$
 $g = \frac{1}{4} \cdot R + r$
 $l = R - r$

Aus diesen Informationen kann man nun Folgendes errechnen:

$$h^2 + (CQ)^2 = g^2 \Leftrightarrow h^2 + 1/16 \cdot R^2 = 1/16 \cdot R^2 + \frac{1}{2} \cdot r \cdot R + r^2 \Leftrightarrow h^2 = r^2 + \frac{1}{2} \cdot r \cdot R$$

$$h^2 + (CB)^2 = l^2 \Leftrightarrow h^2 = l^2 - \frac{1}{4} \cdot R^2$$

$$l = R - r$$

$$r^2 + \frac{1}{2} \cdot r \cdot R = l^2 - \frac{1}{4} \cdot R^2$$

$$\Leftrightarrow r^2 + \frac{1}{2} \cdot r \cdot R + \frac{1}{4} \cdot R^2 = (R - r)^2$$

$$\Leftrightarrow r^2 + \frac{1}{2} \cdot r \cdot R + \frac{1}{4} \cdot R^2 = R^2 - 2rR + r^2$$

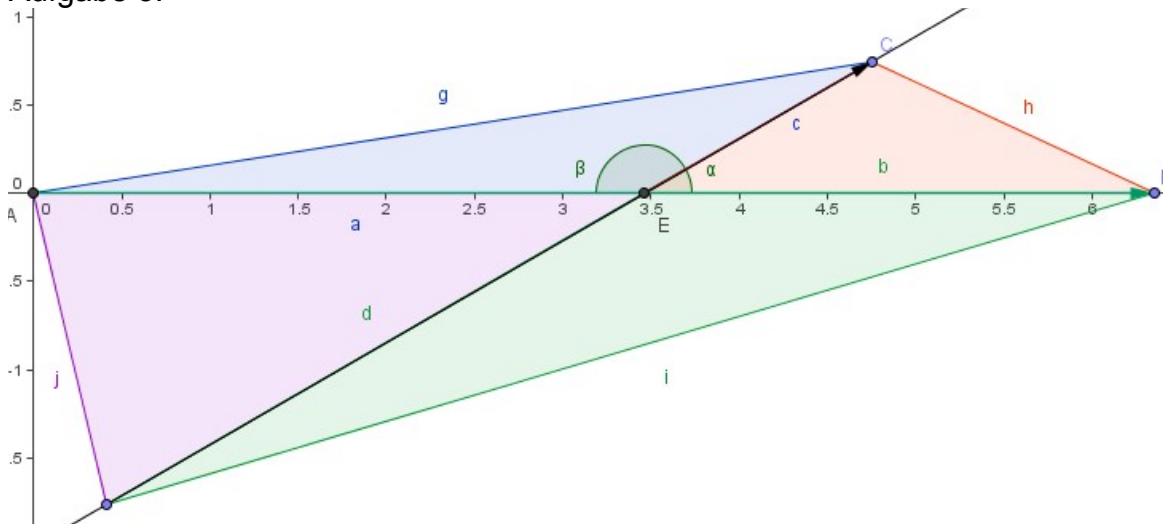
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot r \cdot R + \frac{1}{4} \cdot R^2 = -2 \cdot r \cdot R + R^2$$

$$\Leftrightarrow 2 \frac{1}{2} \cdot r \cdot R = \frac{3}{4} \cdot R^2$$

$$\Leftrightarrow r = 0,3 R$$

Der gesuchte Radius r ist das 0,3fache von R .

Aufgabe 3:



Ich habe das Viereck in vier Dreiecke unterteilt. $e = 5 \text{ cm}$ und $f = 7,3 \text{ cm}$ sind die angegebenen Diagonalen, die ich aus Gründen der Übersicht nicht eingezeichnet habe. Die gegenüberliegenden Winkel von α bzw. β sind selbstverständlich gleich groß wie α bzw. β .

Ich stelle folgende Beziehungen auf:

$$\beta = 180^\circ - \alpha = 150^\circ$$

$$a + b = f$$

$$c + d = e$$

Die Dreiecke haben die Flächeninhalte:

$$A_{\text{blau}} = 0,5 \cdot a \cdot c \cdot \sin \beta = 0,5 \cdot (f-b) \cdot (e-d) \cdot \sin (150^\circ)$$

$$A_{\text{rot}} = 0,5 \cdot b \cdot c \cdot \sin \alpha = 0,5 \cdot (f-a) \cdot (e-d) \cdot \sin (30^\circ)$$

$$A_{\text{grün}} = 0,5 \cdot b \cdot d \cdot \sin \beta = 0,5 \cdot (f-a) \cdot (e-c) \cdot \sin (150^\circ)$$

$$A_{\text{lila}} = 0,5 \cdot a \cdot d \cdot \sin \alpha = 0,5 \cdot (f-b) \cdot (e-c) \cdot \sin (30^\circ)$$

Das Viereck hat den Flächeninhalt $A_{\text{Viereck}} = A_{\text{blau}} + A_{\text{rot}} + A_{\text{grün}} + A_{\text{lila}}$

$\sin (150^\circ) = \sin (30^\circ)$. Ich klammere $0,5$ und $\sin (30^\circ)$ aus. Dann ergibt sich:

$$A_{\text{Viereck}} = 0,5 \cdot \sin (30^\circ) \cdot [(f-b) \cdot (e-d) + (f-a) \cdot (e-d) + (f-a) \cdot (e-c) + (f-b) \cdot (e-c)]$$

$$\Leftrightarrow A_{\text{Viereck}} = 0,5 \cdot \sin (30^\circ) \cdot [(e-d) \cdot (f-b + f-a) + (e-c) \cdot (f-a + f-b)]$$

$$\Leftrightarrow A_{\text{Viereck}} = 0,5 \cdot \sin (30^\circ) \cdot [(e-d) \cdot f + (e-c) \cdot f]$$

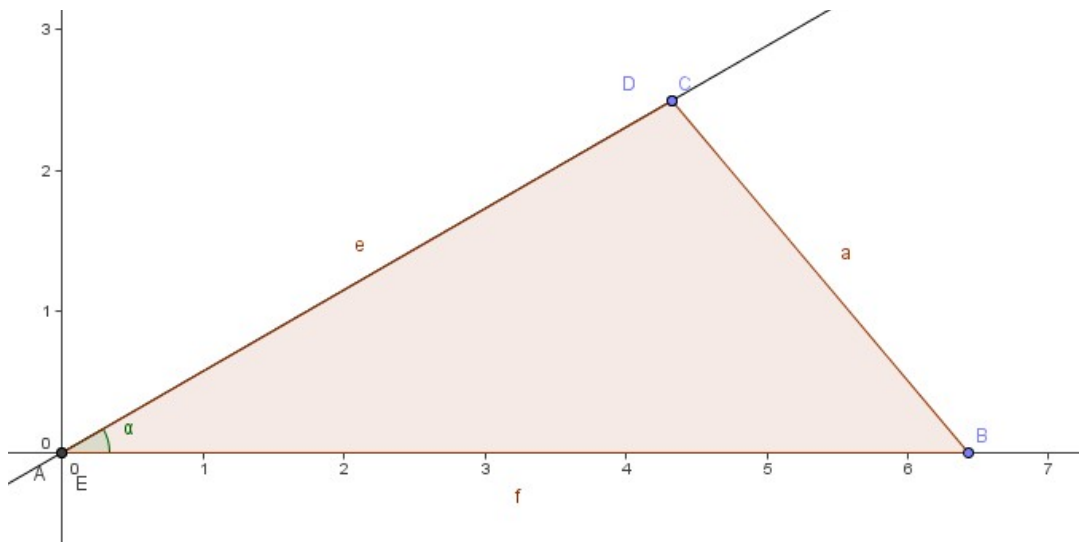
$$\Leftrightarrow A_{\text{Viereck}} = 0,5 \sin (30^\circ) \cdot f \cdot (e-d + e-c)$$

$$\Leftrightarrow A_{\text{Viereck}} = 0,5 \sin (30^\circ) \cdot f \cdot e$$

$$\Leftrightarrow A_{\text{Viereck}} = 0,5 \sin (30^\circ) \cdot 7,3 \text{ cm} \cdot 5 \text{ cm}$$

$$\Leftrightarrow A_{\text{Viereck}} = 9,125 \text{ cm}^2$$

Da, sich die Längen a und b sowie c und d grundsätzlich zu f bzw. e addieren, ist es egal, wo der Schnittpunkt S , also die Teilung von e und f liegt. In Folge dessen, kann der Schnittpunkt S sogar so verschoben werden, dass er mit dem Punkt A ($0|0$) identisch ist, sodass die Unterteilung f in a und b sowie e in c und d nicht mehr notwendig ist, da a und d wegfallen, also die Länge 0 haben.



In diesem Fall ist der Flächeninhalt genauso:

$$\Leftrightarrow A_{\text{Viereck}} = 0,5 \sin (30^\circ) \cdot f \cdot e$$

$$\Leftrightarrow A_{\text{Viereck}} = 0,5 \sin (30^\circ) \cdot 7,3 \text{ cm} \cdot 5 \text{ cm}$$

$$\Leftrightarrow A_{\text{Viereck}} = 9,125 \text{ cm}^2$$

Daraus folgt, dass man durch die Angabe, der Längen der Diagonalen eines Vierecks und deren Schnittwinkel einen spezifischen Flächeninhalt beschreibt. Dabei kann das Viereck verschoben werden und es die Form von „seltsamen“ Vielecken und Dreiecken annehmen.

Dies sieht man an der oben bewiesenen Formel zur Errechnung des Flächeninhaltes eines beliebigen Vierecks unter Angabe der Diagonallängen e und f sowie dem Schnittwinkel α .

$$A_{\text{Viereck}} = 0,5 \sin \alpha \cdot f \cdot e$$

q.e.d.