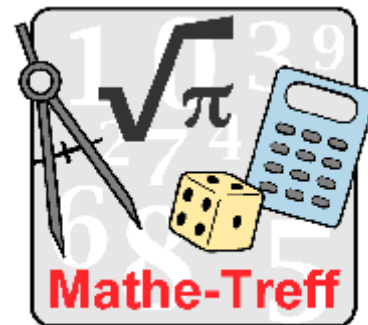


**Mathetreff: Lösungen zu den Knobelaufgaben für die Klassen 9 und 10
November – Dezember 2007**



Aufgabe 1

Dreieck

Der Winkel ABC hat das Winkelmaß β [Beta], die Winkel ABD und CBD haben dann das Winkelmaß von jeweils $\frac{\beta}{2}$ [Formel 1 : Bruchstrich – im Zähler Beta - im Nenner 2]. Da die Gerade durch die Punkte B und D parallel zur Gerade durch die Punkte E und C ist, folgt dass der Winkel BEC das Winkelmaß $\frac{\beta}{2}$ [Formel 2: Bruchstrich – im Zähler Beta - im Nenner 2] hat (Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen). Der Winkel BCE hat das Winkelmaß $\frac{\beta}{2}$ [Formel 3: Bruchstrich – im Zähler Beta - im Nenner 2] (Wechselwinkel an geschnittenen Parallelen). Da die Winkelmaße der Winkel BEC und BCE gleich sind folgt, dass die Streckenlängen der Strecken BC und BE gleich sind. Das Dreieck BEC ist also gleichschenkelig.

Aufgabe 2

Funktionen und Zahlenpaare

Angenommen ist gibt eine Lösung für f , also eine oder auch mehrere Funktionen, die diese Gleichung erfüllen. Wenn es eine oder auch mehrere Lösungen gibt, dann muss die gegebene Gleichung auf jeden Fall für spezielle Belegungen der Veränderlichen x gelten. Setzt man z.B. in der Gleichung:

$$f(x_1 + x_2) - 2f(x_1 - x_2) + f(x_1) - 2f(x_2) = x_2 - 2$$

$x_2 = 0$, so erhält man:

$$f(x_1) - 2f(x_1) + f(x_1) - 2f(0) = -2, \text{ also } f(0) = 1.$$

Setzt man hingegen $x_1 = 0$, so erhält man

$$f(x_2) - 2f(-x_2) + f(0) - 2f(x_2) = x_2 - 2, \text{ mit } f(0) = 1 \text{ erhält man nun}$$

$$-f(x_2) - 2f(-x_2) = x_2 - 3. (1)$$

In dieser Gleichung (1) treten die Argumente $-x_2$ und x_2 auf. Ersetzt man in Gleichung (1) x_2 durch $-x_2$, so erhält man

$$-f(-x_2) - 2f(x_2) = -x_2 - 3. (2)$$

Man hat also zwei Gleichungen erhalten

$$(1): \quad -2f(-x_2) - f(x_2) = x_2 - 3$$

$$(2): \quad -f(-x_2) - 2f(x_2) = -x_2 - 3$$

Multipliziert man Gleichung(2) mit (-2) und addiert zu der nun erhaltenen Gleichung Gleichung (1) so erhält man: $3f(x_2) = 3x_2 + 3. (3)$

Wenn es eine Lösung gibt, so ist es wegen (3) $f(x) = x + 1$. (Diese Bedingung ist notwendig). Die Probe an der Ausgangsgleichung zeigt, dass diese Funktion auch tatsächlich

$f(x_1 + x_2) - 2f(x_1 - x_2) + f(x_1) - 2f(x_2) = x_2 - 2$ erfüllt. Somit ist die Lösung auch die einzige Lösung.

Aufgabe 3

Letzte Ziffer

$11 \cdot 11 = 121$, $11 \cdot 11 \cdot 11 = 1331$, ..., 11^n [Formel 1: 11 hoch n] ergibt für jede natürliche Zahl n , $n > 1$ immer eine Zahl, deren Endziffer immer auf 1 endet.

Für die letzte Ziffer der Potenzen von 7 gilt:

$$7 \cdot 7 = 49$$

$$7 \cdot 7 \cdot 7 = 543,$$

$$7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 543 \cdot 7 = 3801, \text{ als Endziffer } 1, \text{ wegen } 3 \cdot 7 = 21$$

$$7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^5 = \dots 7, \text{ wegen } 1 \cdot 7 = 7$$

$$7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^6 = \dots 9, \text{ wegen } 7 \cdot 7 = 49$$

$$7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^7 = \dots 3, \text{ wegen } 9 \cdot 7 = 63$$

$$7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^8 = \dots 1, \text{ wegen } 3 \cdot 7 = 21$$

$$7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^9 = \dots 7, \text{ wegen } 1 \cdot 7 = 7$$

$$7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^{10} = \dots 9, \text{ wegen } 7 \cdot 7 = 49$$

.....

Man findet also eine gewisse Regelmäßigkeit bei den Endziffern mit einer Periode von vier.

Da 2008 durch 4 teilbar ist, endet 7^{2008} [Formel 2: 7 hoch 2008] auf die Endziffer 1.

Somit endet die Zahl $11^{2008} - 7^{2008}$ [Formel 3: 11 hoch 2008 minus 7 hoch 2008] auf die Endziffer 0.