Mathetreff: Lösungen zu den Knobelaufgaben für die Stufen 11 bis 13
November – Dezember 2007

Aufgabe 1

Funktionen und Zahlenpaare

Angenommen ist gibt eine Lösung für f, also eine oder auch mehrere Funktionen, die diese Gleichung erfüllen. Wenn es eine oder auch mehrere Lösungen gibt, dann muss die gegebene Gleichung auf jeden Fall für spezielle Belegungen der Veränderlichen x gelten. Setzt man z.B. in der Gleichung:

$f(x_1 + x_2) - 2f(x_1 - x_2) + f(x_1) - 2f(x_2) = x_2 - 2$
$x_2 = 0$, so erhält man:
$f(x_1) - 2f(x_1) + f(x_1) - 2f(0) = -2$, also $f(0) = 1$.
Setzt man hingegen $x_1 = 0$, so erhält man
$f(x_2) - 2f(-x_2) + f(0) - 2f(x_2) = x_2 - 2$, mit $f(0) = 1$ erhält man nun

$-f(x_2) - 2f(-x_2) = x_2 - 3$. (1)

In dieser Gleichung (1) treten die Argumente $-x_2$ und x_2 auf. Ersetzt man in Gleichung (1) x_2 durch $-x_2$, so erhält man

$-f(-x_2) - 2f(x_2) = -x_2 - 3$. (2)

Man hat also zwei Gleichungen erhalten
(1): $-2f(-x_2) - f(x_2) = x_2 - 3$
(2): $-f(-x_2) - 2f(x_2) = -x_2 - 3$
Multipliziert man Gleichung(2) mit (–2) und addiert zu der nun erhaltenen Gleichung Gleichung (1) so erhält man: $3f(x_2) = 3x_2 + 3$. (3)
Wenn es eine Lösung gibt, so ist es wegen (3) $f(x) = x + 1$. (Diese Bedingung ist notwendig). Die Probe an der Ausgangsgleichung zeigt, dass diese Funktion auch tatsächlich
$f(x_1 + x_2) - 2f(x_1 - x_2) + f(x_1) - 2f(x_2) = x_2 - 2$ erfüllt. Somit ist die Lösung auch die einzige Lösung.

Aufgabe 2

Schachturnier

Da jeder Schüler gegen jeden gespielt hat, und jeder dieser vier Schüler 3 Spiele bestritten hat gab es 6 Spiele insgesamt. Bei jedem Spiel konnten maximal 3 Punkte vergeben werden. Demzufolge war die war die maximale Punktzahl 18. Allerdings wurden nur 17 Punkte vergeben. Daher muss genau ein Spiel mit einem Remis geendet haben.
Dafür kommen nur Beate und Anton in Frage. Dann hat jedoch Anton gegen Johann und Dieter gewonnen. Also ist Aussage eins richtig!

Aufgabe 3

Familie Kaiser

Sein Opa a Jahre alt, Oma b Jahre alt, Herr Kaiser c Jahre alt, Frau Kaiser d Jahre alt, Johanna e Jahre alt sowie das jüngere Kind f Jahre alt so ergibt sich aus der Aufgabenstellung folgendes Gleichungssystem.

$$\begin{aligned} a+b+c+d+e+f &= 240 \\ 3(e+f) &= c+d \\ 2(c+d) &= a+b \\ (b+c+d+f) &= 2a \\ 3(d-e) &= a-e \end{aligned}$$

[Formel 1 besteht aus 5 Gleichungen.
Die erste Gleichung lautet: $a+b+c+d+e+f=240$.
Die zweite Gleichung lautet: 3 mal Klammer auf e+f Klammer zu ist gleich c+d.
Die dritte Gleichung lautet: 2 mal Klammer auf c+d Klammer zu ist gleich a+b.
Die vierte Gleichung lautet: b + c + d + f gleich 2 mal a..
Die fünfte Gleichung lautet: 3 mal Klammer auf d-e Klammer zu ist gleich a minus f.]

Löst man dieses Gleichungssystem und wählt f als frei wählbare Variable, so erhält man folgende Lösungen:

a = (f+216)/3, b = (216-f)/3, c = (5*f+288)/9, d = (360-5f)/9, e = 24 – f.

Bildet man die Summe von a und b so erhält man folgende Gleichung: a + b = 144.
Da Johanna (e) die ältere von den beiden Kindern ist, gilt 0<f<e<24. Also gilt für f folgende Ungleichung: 0<f<12. Setzt man in die Gleichung a = (f+216)/3 die möglichen Werte für f ein und beachtet, dass das Alter immer in ganzen Jahren angegeben wird, so erhält man für f = 3, f = 6, f = 9 und für e erhält man entsprechend e = 21, e = 18, e = 15. Mögliche Lösungen sind dann für a: 73, 74, 75. Da wegen 3*(d-e) = a – e die Differenz von a und e den Teiler 3 hat, gibt es nur die Lösung a = 75 und e = 15 und f = 9. Also ist c (Herr Kaiser) 37 Jahre alt.