www.mathe-treff.de

Mathetreff: Lösungen zu den Knobelaufgaben

für die Klassen 9 und 10
Januar – Februar 2008

Aufgabe 1

2008 2008 2008 – Und wieder die 2008

Die letzten beiden Ziffern der Zahl 2^{2008} sind 36, denn es gilt:
$2^{2008} = 2^{2*2*2*251} = 4^{2*2*251} = 16^{2*251} = 256^{251}$
Da die letzten beiden Ziffern der Zahl 256^{251} gesucht sind, muss der Rest dieser Zahl beim Teilen durch 100 betrachtet werden.
$256^{251} \equiv 56^{251} \pmod{100}$
Betrachtet man nun die Potenzen von 56, so fällt auf das sich die Reste Modulo 100 periodisch wiederholen, und zwar mit einer Periodenlänge von 5:

Potenz von 56	56	56^2	56^3	56^4	56^5	56^6	56^7	56^8
Rest Modulo 100	56	36	16	96	76	56	36	16

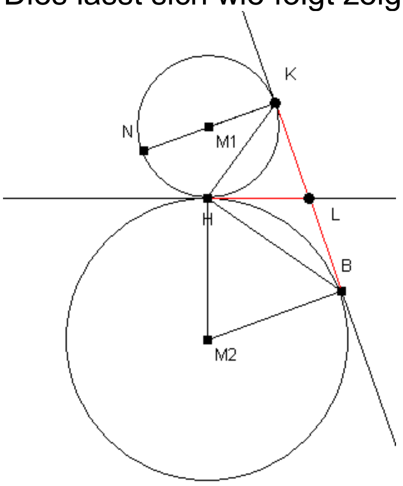
251 lässt beim Teilen durch 5 den Rest 1, die Periode beginnt also gerade neu mit 56.
Somit endet die Zahl 256^{251} auf 56.

Oder:
Gesucht sind die letzten beiden Ziffern der Zahl 2^{2008}.
Die letzen beiden Ziffern der Zweier-Potenzen sind: 2, 4, 8, 16, 32, 64, 28, 56, 12, 24, 48, 96, 92, 84, 68, 36, 72, 44, 88, 76, 52, 04, ...
Diese Folge hat eine Periodenlänge von 20. Wegen 2008 = 20 * 100 + 8 sind die letzten beiden Ziffern 56.

Aufgabe 2

Der verrutschte Schneemann

Jana hat Recht, denn die drei Punkte – niedriges Ohr, Hals: Berührpunkt Bauch- und Kopfkugel, Berührpunkt der Leiter am Bauch – liegen auf einer Geraden.
Dies lässt sich wie folgt zeigen:



Die Leiter berühre den Bauch in B und den Kopf in K. Der Punkt, an dem das niedrigere Ohr ist, sei N; der Hals sei H.
Nun schneide die Tangente an Bauch und Kopf durch den Hals die Leiter in L. Es gilt nun folgendes: $LK = LH = LB$, denn die Dreiecke KLH und HLB sind gleichschenklig.
Das Dreieck KLH ist gleichschenklig, da die Dreiecke LKM_1 und LHM_1 zueinander kongruent sind. Dies ist nach dem Kongruenzsatz Winkel-Seite-Seite der Fall, den der Winkel LKM_1 ist gleich dem

Winkel LHM_1, und da es sich um einen Winkel zwischen Tangente und Radius eines Kreises handelt, gleich 90°. Die Seite KM_1 ist gleich der Seite M_1H, da es sich um den Radius des Kreises handelt. Die Seite LM_1 ist bei beiden Dreiecken gleich, da dies die gemeinsame Seite der beiden Dreiecke ist. Der Beweis, dass das Dreieck HLB gleichschenklig ist, erfolgt analog.

Da nun $LK = LH = LB$ gilt, liegt H auf dem Thaleskreis über BK, denn L ist Mittelpunkt der Strecke BK. Daraus folgt nun, dass der Winkel HLB 90° ist. Auch der Winkel KHN ist 90° groß, denn H liegt auch auf einem Thaleskreis über KN, da M_1 der Mittelpunkt von KD ist.
Folglich liegen also die Punkte N, H und B auf einer Geraden.

Q.e.d

Aufgabe 3

Go-Spiel

Leonard hat 3 Spiele gespielt, die Begründung lautet wie folgt:
Außer Leonie nehmen sieben weitere Personen teil, und all diese sollen verschiedene Anzahlen an Spielen gespielt haben, wobei keiner zweimal gegen den gleichen Gegner oder gegen seinen Zwilling gespielt hat. Die Person mit den meisten Spielen kann also maximal 6 Spiele gespielt haben. Somit muss jede der möglichen Anzahlen an gespielten Spielen; 0,1,2,3,4,5 und 6, genau einmal vorkommen. Die vier Zwillingspaare seien nun mit Zz, Xx, Yy und Ww bezeichnet
O.b.d.A sei nun Z die Person mit den meisten gespielten Spielen, Z hat also schon 6 Spiele gespielt. Folglich hat jeder schon einmal gegen Z gespielt und somit mindestens eine Partei bestritten. Deshalb kann z dann noch nicht gespielt haben, sie ist diejenige mit null gespielten Spielen. Weiterhin sei nun X derjenige, der schon fünfmal gespielt hat, jeder – bis auf x hat also schon mindestens zwei Spiele gespielt. Aus diesem Grund muss x die Person mit nur einem Spiel sein. Nun sei Y derjenige, der schon vier Partien bestritten habe, sein Zwilling y hat dann zwei Spiele gespielt, denn alle anderen haben schon gegen Z, X und Y gespielt.
Wenn jetzt all dies gilt müssen sowohl W als auch w je dreimal gespielt haben. W und w müssen also Leonie und Leonard sein, denn Leonie, die die Aussage gemacht hat, das die übrigen Spieler lauter verschiedene Anzahlen an Partien gespielt hat, muss eine von den zwei Spielern mit gleicher Anzahl an Spielen sein, da sie sonst zwei Spieler mit gleicher Anzahl an Spielern gesehen hätte.