www.mathe-treff.de

Mathetreff: Lösungen zu den Knobelaufgaben

für die Klassen 11 bis 13
Januar – Februar 2008

Aufgabe 1

2008 2008 2008 – Und nicht nur die 2008

Die letzte Ziffer der Zahl $3^{2007} * 7^{2008} * 13^{2009}$ ist 1.
Gesucht ist die letzte Ziffer der Zahl $3^{2007} * 7^{2008} * 13^{2009}$.
Durch algebraische Umformungen ergibt sich:

$3^{2007} * 7^{2008} * 13^{2009}$

$= (3*7*13)^{2007} * 7 * 13^2$

$= 273^{2007} * 7 * 169$

$273^{3*3*223} * 7 * 169$

$\equiv 3^{3*3*223} * 7 * 9 \pmod{10}$

$\equiv 7^{3*223} * 3 \pmod{10}$

$\equiv 3^{223} * 3 \equiv 3^{224} \equiv 3^{56*2*2} \equiv 3^{2*2*2*2*2*7} \equiv 9^{2*2*2*2*7} \equiv 1^{2^3*7} \equiv 1 \pmod{10}$

Nun ist die letzte Ziffer dieser Zahl gesucht. Die letzte Ziffer einer Zahl ist immer der Rest, den diese Zahl beim Teilen durch 10 lässt. Im folgenden wird also Modulo 10 gerechnet:

Somit ist die letzte Ziffer eine 1.
Oder:
Gefragt ist nach der letzten Ziffer des Produkts von $3^{2007}*7^{2008}*13^{2009}$.
Es werden jeweils die Potenzen von 3, 7, und 13 betrachtet:
Bei 3 ergibt sich mit 3, 9, 27, 81, 243 eine Periodenlänge von 4. Da 2007 beim Teilen durch 4 den Rest 3 lässt, endet 3^{2007} auf eine 7.
Für 7 ergibt sich mit 7, 49, 343, 2401, 16807 ebenfalls eine Periodenlänge von 4. 2008 ist ohne Rest durch 4 teilbar, die letzte Ziffer von 7^{2008} ist also eine 1.
Da die letzte Ziffer von 13 wie bei 3 eine 3 ist, ist die Periodenlänge zu 3 analog. 2009 lässt aber beim Teilen durch 4 den Rest 1, die Zahl 13^{2009} endet folglich auf eine 3.
Multipliziert man nun die ermittelten Endziffern, ergibt sich 7*1*3=21. 21 hat als Endziffer die 1. Also ist die Eins die Endziffer der Zahl $3^{2007}*7^{2008}*13^{2009}$.

Aufgabe 2

2008 2008 2008 Let’s play

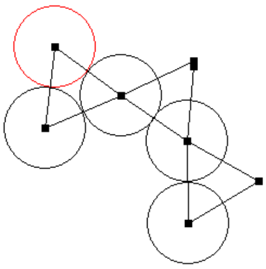
Simone wird gewinnen, denn der letzte Haufen besteht auf jeden Fall aus einer geraden Anzahl von Spielsteinen.
Dies lässt sich wie folgt erklären:
Zu Beginn des Spiels gibt es 2008 Haufen, von denen genau die Hälfte aller Anzahlen an Spielsteinen ungerade ist. Da nun die Hälfte von 2008, die Anzahl der Haufen mit ungeraden Anzahlen an Spielsteinen gerade ist, bleibt eine gerade Zahl über.
Denn in jedem Spielzug wird die Anzahl an ungeraden Haufen um 2 vermindert oder bleibt bestehend; d.h. die Anzahl bleibt immer gerade.
Insgesamt gibt es also nur drei verschiedene Spielzüge:
- Vereinigt man zwei Haufen mit ungerader Anzahl an Steinen, so erhält man eine gerade Anzahl, da die Differenz zweier ungerader Zahlen stets eine gerade Zahl ist. Zwei ungerade Anzahlen von Spielsteinen „verschwinden.“
- Nimmt man zwei Haufen mit geraden Anzahlen, so erhält man wieder eine gerade Anzahl an Steinen, die ungeraden Haufen sind von diesem Spielzug überhaupt nicht betroffen.
- Sucht man sich allerdings zwei verschiedene Haufen aus, einer ungerade, einer gerade, so ist die Differenz ungerade, es verbleibt ein ungerader Haufen, der aber auch schon zu Beginn des Spielzuges vorhanden war. Einer dieser drei Spielzüge wird in jedem Zug durchgeführt, und zum Schluß bleibt ein Haufen mit einer geraden Anzahl von Steinen auf dem Küchenboden liegen.

Aufgabe 3

Sido – Aruba

Der Schwimmreif mit Paul macht $671\frac{1}{3}$ Umdrehungen.

Pauls Schwimmreif fährt auf Kreisbögen entlang, wenn er die Schwimmreifenkette abrollt, da er um keinen Schwimmreif ganz herumrollen kann. Die 2009 gleich großen Schwimmreifen, kann man sich als Kreise vorstellen, die allesamt den Radius r haben. Befindet sich Pauls Schwimmreifen nun genau an zwei anderen Schwimmreifen an der Kette, so bilden die Mittelpunkte dieser drei Kreise ein gleichseitiges Dreieck, da die Seitenlänge stets 2r beträgt.
Dies gilt unabhängig davon zwischen welchen zwei Kreisen sich der Schwimmreif gerade befindet.



Pro Schwimmreif fährt Paul also einen Kreisbogen ab, dessen zughöriger Winkel
$360^\circ - 2*60^\circ - \alpha_1$ ist. Denn ein Schwimmreif hat einen Winkel von 360°, von dem nun die zwei Winkel des gleichseitigen Dreiecks sowie ein Innenwinkel der Größe α_x abgezogen werden. Dies gilt o.b.d.A für jeden der 2008 Kreisbögen. Es lässt sich schreiben:

$$2008*(360^\circ - 2*60^\circ) - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_{2007} + \alpha_{2008})$$

$$= 2008*240^\circ - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_{2007} + \alpha_{2008})$$

(Innenwinkelsumme im 2008-Eck.)

Die „inneren“ Winkel der Kreisbögen sind die Winkel eines 2008-Ecks. Damit ist die Summe von $(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_{2007} + \alpha_{2008})$ die Winkelsumme eines 2008-Ecks. Diese ist nach dem Winkelsummensatz für n-Ecke $(2008 - 2)*180^\circ$. Man kann weiter vereinfachen:

$$2008*240^\circ - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_{2007} + \alpha_{2008})$$

$$= 2008*240^\circ - (2008 - 2)*180^\circ$$

$$= 2008*240^\circ - 2008*180^\circ + 360^\circ$$

$$= 360^\circ*(334\frac{2}{3} + 1)$$

Der Schwimmreifen von Paul rollt insgesamt um Kreisbögen, die eine Länge von $(334\frac{2}{3} + 1) = 335\frac{2}{3}$ (Schwimmreifenumfang) haben. Nun ist aber noch folgendes zu beachten: Zwar sind die Radien der Schwimmreifen alle gleich groß, allerdings bewegt sich der Mittelpunkt von Pauls Schwimmreifen beim Umrunden der anderen Reifen auf einem Kreis bzw. auf Kreisbögen, deren Radien 2r betragen. Deshalb muss sich Paul in seinem Schwimmreifen pro Grad, um das er sich dreht, zwei Grad weiterdrehen. Folglich hat sich Paul nach dem Umrunden der gesamten Kette $335\frac{2}{3}*2 = 671\frac{1}{3}$ Mal gedreht.