Mathetreff: Lösungen zu den Knobelaufgaben
Knobelaufgaben für die Oberstufe
März – Mai 2008

Aufgabe 1

Das verformte Schoko-Ei

Mit dem neuen Querschnitt könnten nur stehend mehr Schoko-Eier in die Schachtel gesteckt werden.

Querschnitt desverformten Eies mit Hilfslinien

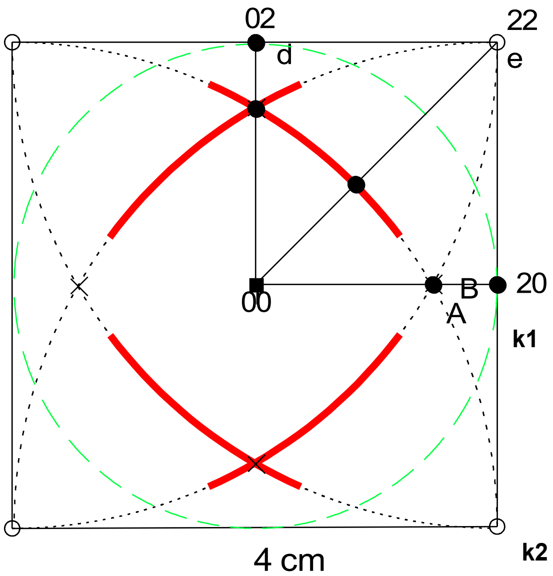

Abb. Querschnitt des verformten Schoko-Eies (orange - ursprünglich: grün gestrichelt)

Durch den hervorgehobenen Sektor kann man sich die Form in ein Koordinatensystem implementiert vorstellen; die Linien OA und OB liefern –verdoppelt- die Maße 2f der maximalen bzw. 2e der minimalen Ausdehnung des verformten Eies.

$k_1 : x^2 + y^2 = 2^2 = 4 \qquad (1)$

$k_2 : (x+2)^2 + (y+2)^2 = 4^2 = 16 \quad (2)$

Koordinaten von $A(f/0)$ *aus* (2) *für* $f > 0$:

$(f+2)^2 + 0^2 = 16 \Leftrightarrow \; f = 2\sqrt{3} - 2 = 2(\sqrt{3} - 1) \approx 1{,}46$

Es ergibt sich daraus das Maß $2f = 4(\sqrt{3} - 1) \approx 2{,}93$ *als größte Ausdehnung.*

Kooerdinaten von $B(b/b)$ *aus* (2) *für* $b > 0$:

$2(b+2)^2 = 16 \Leftrightarrow \; b = 2\sqrt{2} - 2 = 2(\sqrt{2} - 1) \approx 0{,}83$

$e^2 = 2b^2 = 8(\sqrt{2} - 1)^2 = 24 - 16\sqrt{2}$ *(S.d.Pythagoras)*

$e = 2\sqrt{6 - 4\sqrt{2}} = 2\sqrt{4 - 2 \cdot 2\sqrt{2} + 2} = 2(2 - \sqrt{2}) \approx 1{,}17$

Es ergibt sich daraus das Maß $2e = 4(2 - \sqrt{2}) \approx 2{,}43$ *als kleinste mediale Ausdehnung.*

Stehend können höchstens sechs Reihen von je sechs verformten Eiern in einer Schachtel mit den Maßen 14,4cm X 16cm angeordnet werden.

(Hinweis: In das Grundquadrat für den Platzbedarf eines normalen Eies passen keine zwei verformte Eier hinein.)

Aufgabe 2

Klima und Meeresspiegel

a) (nach Franziska K. –Stufe 5- aus Neuss)
Die Fläche von Grönland beträgt (lt. "Wikipedia") 2.166.086 km². Davon sind angeblich 341.700 km² eisfrei. Der Rest, also [2.166.086-341.700 =] 1.824.386 km² ist also mit Eis bedeckt. Wenn das Eis im Schnitt 2km dick ist, ergibt sich ein Eisvolumen von [2km x 1.824.386 km² =] 3.648.772 km³.Die Erde hat eine Oberfläche von 510.000.000 km², davon sind 70,7%, also [510.000.000 km² x 0,707 =] 360.570.000 km² Ozeane. Geht man nun von Steilküsten aus, würde die Wasseroberfläche um (3.648.772 km³ : 360.570.000 km² =) 0,010119455 km steigen, also um ca. 10m.
Berücksichtigt man nun noch, dass sich Wasser, wenn es gefriert um ca. 8,9 % ausdehnt oder umgekehrt Eis bei der Schmelze zu Wasser an Volumen verliert, würde der Meeresspiegel "nur" um ca. 9,3 m steigen. Alle Informationen habe ich aus dem Internet, aus "Wikipedia".

b) Die Eismasse auf dem arktischen Meer verdrängt Wasser gleicher Masse. Allein mathematisch –ohne physikalische oder weitere Prozesse zu berücksichtigen- würde das Schmelzen keinen Einfluss auf NormalNull des Meeresspiegels haben.

c) Die Antarktis ist ein Kontinent. Abschmelzendes Eis hätte zur Folge, dass –im Gegensatz zur Arktis- den Meeresspiegel (um ein Vielfaches des Grönlandeis-Einflusses) erhöhen würde.

Aufgabe 3

Gleichungssysteme

a) Die Lösungsmenge L dieses Gleichungssystems ergibt sich durch Faktorisieren oder durch Einsetzen (frei nach Sebastian D. –Stufe 11- aus Wuppertal) aus nachstehenden Umformungen:

$$\begin{aligned}
&a+b=3 \wedge a^3+b^3 = 9 \Leftrightarrow \\
&a+b=3 \wedge (a+b)(a^2-ab+b^2) = 9 \Leftrightarrow \\
&a+b=3 \wedge 3\cdot(a^2-ab+b^2) = 9 \Leftrightarrow \\
&a+b=3 \wedge a^2-a(3-a)+(3-a)^2 = 3 \Leftrightarrow \\
&a+b=3 \wedge a^2-3a+2 = 0 \Leftrightarrow \\
&(a/b)\in \{(2/1),(1/2)\} = L \\
&oder \\
&a+b=3 \wedge a^3+b^3 = 9 \Leftrightarrow \\
&b=3-a \wedge a^3+b^3 = 9 \Leftrightarrow \\
&b=3-a \wedge a^3+(3-a)^3 = 9 \Leftrightarrow \\
&b=3-a \wedge a^3+27-27a+9a^2-a^3 = 9 \Leftrightarrow \\
&b=3-a \wedge a^2-3a+2 = 0 \Leftrightarrow \\
&b=3-a \wedge (a-1)(a-2) = 0 \\
&(a/b)\in \{(2/1),(1/2)\} = L
\end{aligned}$$

b) Die Lösungsmenge L ergibt sich durch folgende Äquivalenzumformungen:

$$\begin{aligned}
&a^2+b^2=3 \wedge a^4+b^4 = 9 \Leftrightarrow \\
&b^2=3-a^2 \wedge a^4+(3-a^2)^2-9 = 0 \Leftrightarrow \\
&b = \pm\sqrt{3-a^2} \wedge 2a^4-6a^2 = 0 \Leftrightarrow \\
&b = \pm\sqrt{3-a^2} \wedge 2a^2(a^2-3) = 0 \Leftrightarrow \\
&b = \pm\sqrt{3-a^2} \wedge \left[a=0 \vee a=\sqrt{3} \vee a=-\sqrt{3}\right] \Leftrightarrow \\
&(a/b)\in \left\{(0/+\sqrt{3}),(0/-\sqrt{3}),(+\sqrt{3}/0),(-\sqrt{3}/0)\right\} = L
\end{aligned}$$