Mathe-Treff: Lösungen zu den Knobelaufgaben für die Oberstufe November - Dezember 2008

Aufgabe 1

Ein merkwürdiges Dreieck

a)

1									1. Zeile
2	3								2. Zeile
4	5	6							3. Zeile
7	8	9	10						4. Zeile
11	12	13	14	15					
16	17	18	19	20	21				
22	23	24	25	26	27	28			
29	30	31	32	33	34	35	36		
37	38	39	40	41	42	43	44	45	

b) 21 ; 45

c) 5050

d) Es handelt sich um eine Anwendung des „Gausstricks“ zur Berechnung des Summenwertes einer arithmetischen Reihe.
Sei z die Zeilenzahl und s die Spaltenzahl, dann lautet das allgemeine Ergebnis in

$$T(z,s) = z\,\frac{z+1}{2} - (z - s)$$

e) Zeile 1571 ; Spalte 1332

Aufgabe 2

Formen und Farben von Gegenständen

Sei M die Menge aller gegebenen Gegenstände von derselben Farbe.
Wenn es in ihr zwei solche gibt, die sich in der Form unterscheiden, dann unterscheidet sich jeder Gegenstand anderer Farbe von wenigstens einem der Gegenstände aus M sowohl in Form als auch Farbe.
Wenn aber alle Gegenstände aus M auch in der Form übereinstimmen, dann unterscheidet sich nach Voraussetzung wenigstens ein Gegenstand anderer Form von Ihnen in der Farbe, da anderenfalls alle Gegenstände dieselbe Farbe hätten, was im Widerspruch zur Voraussetzung wäre.

Aufgabe 3

Terme mit 2008

$$2008^{2008} \prec (2008!)^2$$

Es sei eine natürliche Zahl mit $1 < k < 2008$, dann lässt sich $a = (2008!) \cdot (2008!)$ in folgender Form schreiben:

$a = (1 \cdot 2008) \cdot (2 \cdot 2007) \cdot (1 \cdot 2008) \cdot \ldots \cdot (k \cdot (2009 - k)) \cdot \ldots \cdot (2007 \cdot 2) \cdot (2008 \cdot 1)$
Nach Voraussetzung über k gilt
$(2008 - k) \cdot (k - 1) > 0$ und $2008\,k - k^2 - 2008 + k > 0$ sowie $k\,(2009 - k) > 2008$
Die letzte Ungleichung besagt, dass jeder der 2006 Faktoren bis auf den ersten und letzten größer als 2008 ist. Die beiden Randprodukte haben den Wert 2008.

Damit gilt die Ungleichung.