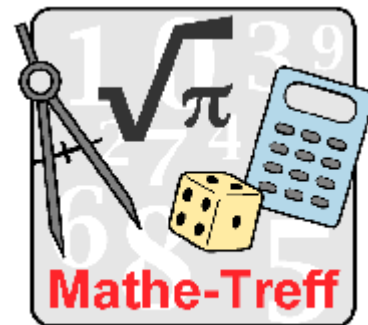


**Mathe-Treff: Lösungen zu den Knobelaufgaben
für die Oberstufe
Januar-Februar 2009**



Aufgabe 1

Hexen im magischen Enneagon

Die Dreiecke innerhalb des Neunecks sind eindeutig über ihre Seitenlängen bestimmt. Seitenlängen werden in der Einheit $\ddot{u}E$ – übersprungene Ecken – gemessen. Mögliche Seitenlängen sind 1, 2, 3 und 4. Offensichtlich können die beiden kleineren Seitenlängen nur (1;1), (1;2), (1;3), (1;4), (2;2), (2;3) und (3;3) sein. Daraus ergeben sich dann folgende sieben Möglichkeiten für Dreiecke:

(1;1;2), (1;2;3), (1;3;4), (1;4;4), (2;2;4), (2;3;4) und (3;3;3).

Da es 9 Mädchen gibt, aber nur zwei Umhangfarben, haben mindestens 5 Mädchen, und damit auch 5 Ecken, die gleiche Farbe. Aus 5 Eckpunkten lassen sich 5 über 3=10 verschiedene Dreiecke bilden, denn aus 5 möglichen Punkten müssen 3 Punkte als Eckpunkte für das Dreieck ausgewählt werden. Da sich diese 10 Dreiecke auf die 7 verschiedenen, nicht zu einander kongruenten Dreiecke verteilen, gibt es von mindestens einem Dreieck zwei Dreiecke. Diese sind dann gleichfarbig und kongruent. Damit sollte Markus überzeugt sein.

Aufgabe 2

Willkommen im Jahr 2009

$$a^3 + 4036081 = a^3 + 2009^2$$

$$a^3 + 2009^2 = (a + 2009)(a^2 - 2009a + 2009^2) - x$$

$$= (a^3 - 2009a^2 + 2009^2a + 2009a^2 - 2009^2a + 2009^3) - x$$

$$= a^3 + 2009^3 - x$$

$$\Leftrightarrow 2009^2 = 2009^3 - x$$

$$\Leftrightarrow x = 2009^3 - 2009^2$$

$$\Leftrightarrow x = 8104450648$$

Da $a^3 + 2009^2 = (a + 2009)(a^2 - 2009a + 2009^2) - x$ gilt, müssen nun beide Summanden durch $a+2009$ teilbar sein, wenn a^3+2009^2 durch $a+2009$ teilbar sein soll. Im ersten Summand ist $a+2009$ als Faktor enthalten, dieser ist also durch $a+2009$ teilbar. Für den zweiten Summand x gilt, wenn dieser durch $a+2009$ teilbar und a maximal ist, folgendes: $a+2009=x$. Daraus folgt: $a=8104448639$

Aufgabe 3

Schneehasen

Die Felder des 2009×2009 Bretts seien nach dem Schachbrettmuster eingefärbt. Nun gibt es mehr schwarze als weiße Felder – es gibt 2018041 schwarze und 2018041 weiße Felder. Jeder Schneehase wechselt beim Sprung auf das Nachbarfeld die Farbe seines Feldes. Auf den 2018041 schwarzen Feldern sitzen nun 2018040 Schneehasen, die von weißen Feldern kommen, d.h. auf den 2018040 weißen Feldern sitzen 2018041 Schneehasen, die von schwarzen Feldern kommen.