



Aufgabe 1

Münzen

a) Man ermittelt zuerst, wie oft sich die 1-Cent-Münze dreht, wenn man sie einmal um die 2€-Münze abrollt. Dazu teilt man den Umfang der 1-Cent-Münze durch den der 2€-Münze:

$$\frac{\pi \cdot 25,75}{\pi \cdot 16,25} = \frac{103}{65} \approx 1,5846.$$

Demzufolge dreht sich die 1ct-Münze ungefähr 1,585-mal bei einem Umlauf um die 2€-Münze. Um den Winkel der Zahl auf der 1ct-Münze in Bezug auf die Ausgangsposition zu bestimmen, multipliziert man 0,58461 mit 360° (360° A 1 Umdrehung). Die ganze Umdrehung kann man ignorieren, da sie für den Winkel der Münze am Ende keine Rolle spielt:

$$1,58461 \cdot 360^\circ \approx 360^\circ + 210,46154^\circ.$$

Demnach steht die Münze nach einem Umlauf um die 2€-Münze in einem Winkel von ca. $210,46^\circ$ zur Ausgangsposition.

b) Man bestimmt das kgV der Zahlen 103 und 65. Dieses lautet $103 \cdot 65 = 6695$. Hiernach muss man die 1ct-Münze 65-Mal um die 2€-Münze drehen, um wieder in die Ausgangslage und –Position zu gelangen.

Aufgabe 2

Eine ungewöhnliche Gleichung

Es sei z eine Lösung der Gleichung $x^{2z} + (xy)^z = y^{2z}$. Dann gilt $x^{2z} + (xy)^z - y^{2z} = 0$ und wegen $y \neq 0$

kann man durch y^{2z} teilen und erhält $\left(\frac{x}{y}\right)^{2z} + \left(\frac{x}{y}\right)^z - 1 = 0$. Substituiert man

$\left(\frac{x}{y}\right)^z = a$, so ist $a > 0$ und man erhält folgende Gleichung:

$a^2 + a - 1 = 0$. Diese Gleichung hat genau eine positive reelle Lösung. Diese lautet:

$$a = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}. (*)$$

Wäre nun z eine natürliche Zahl, so wäre, da x, y von Null verschiedene natürliche Zahlen sind,

$\left(\frac{x}{y}\right)^z = a$ eine rationale Zahl im Widerspruch zu (*). Daher hat die Ausgangsgleichung keine Lösung im Bereich der natürlichen Zahlen.

Im Bereich der reellen Zahlen mit $x \neq y$ und $x > 0$ und $y > 0$ folgt wegen $\left(\frac{x}{y}\right)^z = a$ und wegen (*) durch

Logarithmieren:

$$z \cdot \lg\left(\frac{x}{y}\right) = \lg(a).$$

Also lautet die Lösung für z : $z = \frac{\lg(a)}{\lg(x) - \lg(y)} = \frac{\lg(\sqrt{5} - 1) - \lg(2)}{\lg(x) - \lg(y)}$.

Aufgabe 3

Die gute alte Zeit, 2. Teil

Die Bezeichnungen sind die üblichen. Idee: Man zeichnet ein Parallelogramm mit der Diagonalenlänge $2 \cdot s_c$. In jedem Parallelogramm halbieren sich die Diagonalen. Die andere Diagonalenlänge ergibt sich aus der Konstruktion.

Zur Konstruktionsbeschreibung:

Man zeichnet zuerst die doppelte Länge der Seitenhalbierenden $2 \cdot s_c$.

Man erhält die Punkte C und D. Anschließend zeichnet man einen Kreis um C mit dem Radius $r = \overline{AC}$ und um D einen

Kreis mit dem Radius $r = \overline{BC}$. Man erhält zwei Schnittpunkte A und A*. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit benutzen wir im Folgenden nur den Punkt A. Anschließend nutzt man die Punktsymmetrie des Parallelogramms aus. Im Mittelpunkt der Strecke \overline{DC} wird der Punkt A punktgespiegelt und man erhält den Punkt B. Das Dreieck ABC ist das gesuchte Dreieck.

