www.mathe-treff.de

Mathe-Treff: Lösungen zu den Knobelaufgaben für die Klassen 9 und 10 Juni-August 2009

Aufgabe 1

2009 in Ankara

a)Aishe probierte und notierte:

$200+201+202+203+204+205+206=$

$7\cdot 200+(1+2+3+4+5+6)=$

$7\cdot 200+21=1421$ "$2009-1421=588$ *zu wenig*!-

588 *auf* 7 *Summanden verteilen.*"$588:7=84$

Sie musste also die Summanden um 84 vergrößern und fand als Lösung
284+285+286+287+288+289+290=2009. -
Nachdem Aishe die Überlegungen von Ali und Ahmed zur Kenntnis genommen hatte, kam sie auf eine andere Idee, die direkt zum Ziel führte:
$2009=7\cdot(a+3)\Leftrightarrow 2009:7=a+3\Leftrightarrow 2009:7-3=a\Leftrightarrow a=284$ Hierdurch wird ihr Ergebnis auch bestätigt.
Mit der folgenden Ergänzung schoss sie aber über das Ziel hinaus:
$2009=7\cdot(a+20)\Leftrightarrow 2009:7=a+20\Leftrightarrow 2009:7-20=a\Leftrightarrow a=29$
Mit der Summe von 41 aufeinanderfolgenden Zahlen ab 29 erhält sie auch 2009.
b)Ahmet und Ali überlegten, dass sie Platzhalter (Variable) verwenden müssen: Sie wählten a für die Anfangszahl (=kleinsten Summanden) und notierten:
a+(a+1)+(a+2)+(a+3)+(a+4)+(a+5) +(a+6)= 7a + (1+2+3+4+5+6) = 7a + 21= 7(a+3)
Erkenntnis: Die Summe von sieben aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen ist stets durch 7 teilbar, folglich nie prim!
c)Kemal kommentierte seine Aufgabe mit „Superleicht! – Gerade Zahlen haben stets den Teiler 2; folglich kann jede ungerade Zahl u geschrieben werden als u = 2m+1 für geeignetes natürliches m.“
Er schrieb auf „2m+1 = (m+m)+1 = m + (m+1)“ und sagte nur noch: „Beachtet, dass (m+1) Nachfolger von m ist.

Aufgabe 2

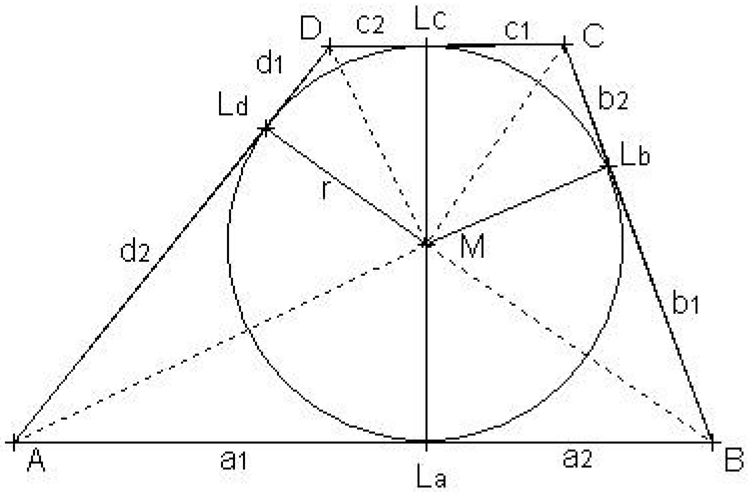
Viele Ecken und Strecken (von Tobias G. aus Gevelsberg)

Lösung: Für ein Vieleck und dessen Diagonalen gilt:
Anzahl der Diagonalen = n(n-3):2
Somit hat ein 2009-Eck 2.015.027 Diagonalen.

Lösungsweg:
Diese Formel ergibt sich daraus, dass n die Anzahl der Ecken des Vielecks ist, und da man die beiden benachbarten Eckpunkte des Punktes, an dem man mit dem Diagonalen-Zeichnen beginnt, nicht nutzen kann, und den eigentlichen Anfangspunkt auch nicht, muss man von n 3 abziehen, das Ergebnis mit n multiplizieren (für jeden Eckpunkt einzeln). Weil die Diagonalen jeweils zwei Punkte verbinden, und dadurch aus der Sichtweise eines jeden Punktes einer Diagonale zusammengerechnet zwei Diagonalen sind, sind die Hälfte der entstandenen Diagonalen unbrauchbar, demnach muss man durch 2 dividieren.

Aufgabe 3

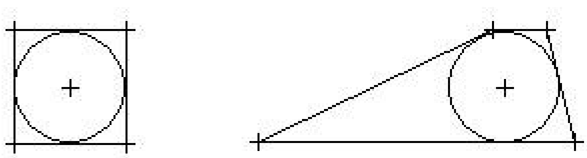
Spieltisch



a) Die Winkelhalbierenden treffen sich im Mittelpunkt des Inkreises – wie bei der Konstruktion der Mittelpunkte von Inkreisen von Dreiecken. Deshalb halbierte Willibald die Innenwinkel.

b) Zynthia wusste, dass für Tangentenvierecke mit den Seitenlängen a, b, c und d gilt: $a+c=b+d$; deshalb besorgte sie gleich viel helles wie dunkles Furnier.
Dieser Sachverhalt soll hier begründet werden durch den Nachweis im Drachenviereck AL_aML_d.
Der größte (rechte) Winkel liegt der größten Seite AM in den Dreiecken AL_aM und AML_d gegenüber. Die Seiten ML_a und ML_d haben die Länge r des Inkreises-Radius. Nach dem Kongruenzsatz „SsW“ sind die beiden Dreiecke kongruent. Damit ist die Dracheneigenschaft des Vierecks AL_aML_d. nachgewiesen; es gilt speziell $a_1=d_2$.
Entsprechend gilt: $a_2=b_1$, $b_2=c_1$, $c_2=d_1$.
Folglich gilt: $a+c = a_1+a_2+c_2+c_1 = d_2+b_1+d_1+d_2 = b+d$ (q.e.d.)

Zusatz:



Kreisumfang
links größer als - rechts kleiner als
die Summe der Längen gegenüberliegender Seiten

Diese Figuren legen nahe, dass es der Zufall wollte, dass eine Furniersorte genauso lang war wie der Umfang des kreisförmigen Tisches.