



## Aufgabe 1

### Undichte Primzahlen

Anne hatte sich folgende Tabelle – ganz allgemeiner Art-, die auch nützlich für Bernd war, hergestellt, bevor sie auf die Aufgabenstellung aufmerksam wurde:

$n$  ist hier die Anzahl der Summanden,  $a$  die (kleinste) Anfangszahl in der Summe aufeinander folgender natürlicher Zahlen.

$z=105$	$n$	$a$	
	2	52	$52+53 = 52+52+1$
	3	34	$34+35+36 = 34+34+34+(1+2)$
	5	19	$19+20+21+22+23 = 19+19+19+19+19+(1+2+3+4)$
	7	12	$12+13+14+15+16+17+18 = 12+12+12+12+12+12+12+15$
	$k$	$a$	$z = a + (a + 1) = k \cdot a + 1$ für $k = 2$ (*)
			$z = a + (a + 1) + \dots + (a + (k - 1)) = ka + \frac{(k-1)k}{2}$ für $k > 2, k$ ungerade

Ihr war bei den Summenwerten aufgefallen, dass die Anfangszahl  $a$  immer mit der Anzahl  $k$  der Summanden multipliziert und dieses Produkt um sogenannte Dreieckszahlen (1, 3, 6, 10, 15, 21, ...) vergrößert werden musste. Dreieckszahlen ergeben sich als Summe fortlaufender natürlicher Zahlen, wenn man mit 1 beginnt (nach Gauß ergibt sich die Summe  $s$  der ersten  $n$  natürlichen Zahlen als  $s = n(n+1):2$ ).

Betrachten wir den Summenwert für  $k$  Summanden; dann ist er stets eine natürliche Zahl, weil der Bruch sowohl für gerades wie auch für ungerades  $k$  durch 2 gekürzt werden kann. Der Term ist durch  $k$  teilbar, wenn  $k$  ungerade ist (\*) – für gerades  $k$  ist er durch  $k/2$  teilbar (\*\*).

Anne überträgt das Ergebnis auf 2009:  $2009 = ka + (k-1)k/2$ .

Für  $k=2$  erhält sie  $2009 = 1004 + 1005$ . Falls  $k$  die Werte von Teilern der Zahl 2009 annimmt, ergeben sich als Paare  $(k;a)$ : (7;284), (41;29), (49;17) und (287;-136). Folglich kann 2009 unter den gegebenen Bedingungen als Summe von zwei, sieben 41 oder 49 aufeinander folgenden natürlichen Zahlen geschrieben werden.

Bernd erkannte richtig, dass der Summenwert nie prim werden kann (vgl. (\*) und (\*\*)!).

Falls Bernd jedoch glaubte, die „Formel“  $7 \cdot 7 \cdot 41 = \frac{k(2a+k-1)}{2}$  verallgemeinern zu können, so zeigen

folgende Beispiele, dass dies übereilt (und ein Fehlschluss) war:

Die Primzahlzerlegung von 18 liefert für  $k=3$  auch  $a=5$ , aber für  $k=2$  nur die untauglichen Wert  $a=9$  und für  $k=6$  den nicht natürlichen Wert  $a=0,5$ .

Hingegen liefert 27 für  $k=2$   $a=13$ , für  $k=3$   $a=5$  und für  $k=6$   $a=2$ , was zeigt, dass  $k$  kein Teiler des Summenwertes sein muss. Bernds Verallgemeinerung ist nicht auf beliebige Zahlen übertragbar.

## Aufgabe 2

### Bahnfahrt-Zahlentheorie

$479001600 = 12!$  ist durch alle natürlichen Zahlen von 2 bis 12 teilbar; die um 1 kleinere Zahl  $479001599$  hinterlässt also bei Division durch die betreffenden Divisoren den größtmöglichen Rest. Die kleinste Zahl mit der geforderten Eigenschaft muss um 1 kleiner sein als das  $kgV(2,3,4,\dots,12)$ .  $kgV(2,3,4,\dots,12) - 1 = 27720 - 1 = 27719$  hat die gewünschten Eigenschaften.

