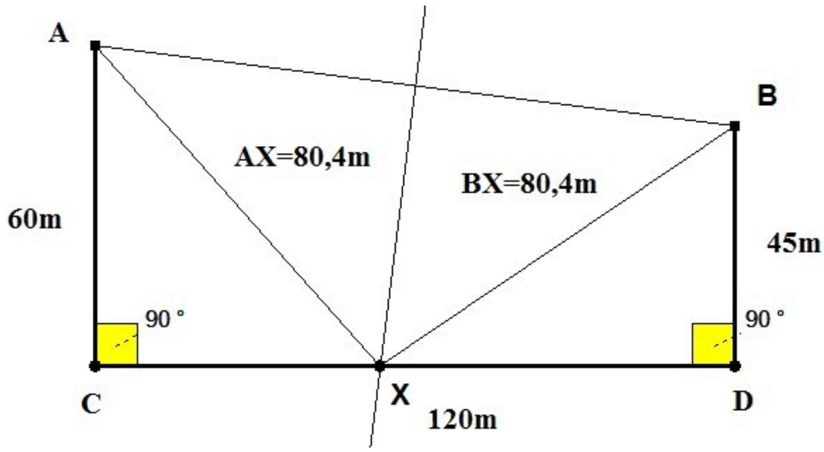
Mathetreff: Lösungen zu den Knobelaufgaben
für die Klassen 9 und 10
Januar - Februar 2010

Aufgabe 1

Das Leiterproblem

Man zeichnet eine maßstäbliche Zeichnung. Gewählter Maßstab: $60m \mathrel{\hat{=}} 6cm$. Anschließend konstruiert man die Mittelsenkrechte der Strecke $\overline{AB}$. Diese schneidet die Bodenstrecke $\overline{CD}$ im Punkt X.
Aufgrund der Eigenschaften der Mittelsenkrechten ist dieser Punkt der gesuchte Punkt X. Durch messen ergibt sich: $\overline{AX} = \overline{BX} \approx 8{,}04\text{m}$. Die Leiter muss 80,4m lang sein.



Rechnung:
Zur Vereinfachung gelten folgende Abkürzungen: $\overline{CX} = a,\ \ \overline{DX} = b$. Dann gilt:

$a + b = 120,$ und $b = 120 - a$. Also $60^2 + a^2 = \overline{AX}^2$ und $45^2 + b^2 = \overline{BX}^2$. Dann gilt:

$60^2 + a^2 = 45^2 + b^2$ bzw. $60^2 + a^2 = 45^2 + (120 - a)^2$. Dann ergibt sich:

$$60^2 + a^2 = 45^2 + 120^2 - 2 \cdot 120a + a^2$$

$$a = \frac{60^2 - 45^2 - 120^2}{-2 \cdot 120}$$

$a = 53{,}4375 \Rightarrow\ b = 66{,}5625$. Also gilt für $\overline{\text{AX}} = \sqrt{60^2 + a^2} \Rightarrow\ \overline{\text{AX}} \approx 80{,}35.$
Damit müsste die Leiter 80,4 m lang sein. Diesen Wert bestätigt die Konstruktion.

Aufgabe 2

Vater und Sohn

Das Lebensalter des Vaters sei x, die des Sohnes sei y. Dann gilt:

x=4y	(1),
50 < x+y < 100	(2),
xy < 700	(3).

(1) in (2) eingesetzt ergibt: 50 < 4y+y < 100, also 50 < 5y < 100. Diese Ungleichung hat folgende Lösungsmenge: $\text{L}_1 = \{11,\ 12,\ \ldots\ ,\ 19\}$. Wegen (3) und mit (1) gilt:

$4y^2 < 700 \Rightarrow\ y < \sqrt{175} \Rightarrow\ \text{L}_2 = \{0,\ 1,\ 2,\ \ldots, 11,\ 12,\ 13\}$.

$\text{L}_1 \cap \text{L}_2 = \{11,\ 12,\ \ldots\ ,\ 19\} \cap \{0,\ 1,\ 2,\ \ldots, 11,\ 12,\ 13\} = \{11,\ 12, 13\}$

Der Sohn kann somit 11, 12 bzw. 13 Jahre alt sein.

Aufgabe 3

Die Stadt und das Schwimmbad

Es seien x die Anzahl der Erhöhungen um 0,5€ und damit auch die Anzahl der Besucherrückgänge um 50 je Erhöhungsrunde. Also gilt für den Umsatz

$U = U(x) = (500 - 50\mathrm{x})(5 + 0{,}5\mathrm{x})$ mit $x \in \{0,1,2,3....\}$

Der Umsatz kann als Funktion von x aufgefasst werden. Gesucht ist der Wert von x, bei dem *U(x)* den maximalen Wert erreicht. Für die Funktionsgleichung ergibt sich:

$U(x) = (500 - 50\mathrm{x})(5 + 0{,}5\mathrm{x}) = 100(5 - 0{,}5\mathrm{x})(5 + 0{,}5\mathrm{x}) = 100(25 - 0{,}25x^2) = -25x^2 + 2500$. Diese Funktionsgleichung ist die einer quadratischen Funktion, die ihren Scheitelpunkt im Punkt SP(0|2500) hat. Demzufolge ist der Umsatz schon bei diesem Eintrittspreis am größten.