

Aufgabe 1

Die neue Heizung

Erstes Angebot:

Zur Vereinfachung gelten folgende Abkürzungen: $\overline{FX} = a$, $\overline{GX} = b$. Dann gilt:

$a + b = 10$, und $b = 10 - a$. Also $6^2 + a^2 = \overline{AX}^2$ und $4,5^2 + b^2 = \overline{BX}^2$. Dann gilt:

$6^2 + a^2 = 4,5^2 + b^2$ bzw. $6^2 + a^2 = 4,5^2 + (10 - a)^2$. Dann ergibt sich:

$$6^2 + a^2 = 4,5^2 + 10^2 - 2 \cdot 10a + a^2$$

$$a = \frac{6^2 - 4,5^2 - 10^2}{-2 \cdot 10}$$

$$a = 4,2125 \Rightarrow b = 5,7875. \text{ Also gilt für } \overline{AX} = \sqrt{6^2 + a^2} \Rightarrow \overline{AX} \approx 7,33.$$

Die Gesamtlänge beträgt 14,66 km. Für die Gesamtkosten ergibt sich folgendes, da die 2. Leitung 10 Prozent billiger angeboten werden kann, dass nur noch eine Länge von $7,33 + 0,9 \cdot 7,33 \approx 13,93$ bezahlt werden müsste. Also ist die zu zahlende Länge etwa 13,93 km lang.

Zweites Angebot:

$\overline{AX} + \overline{BX}$ soll minimal werden, das heißt,

$$L(a, b) = \overline{AX} + \overline{BX} = \sqrt{6^2 + a^2} + \sqrt{4,5^2 + b^2} \text{ sollen minimal werden.}$$

Mit $a + b = 10$, $b = 10 - a$ und $a > 0$, $b > 0$; $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\text{folgt: } L(a) = \sqrt{6^2 + a^2} + \sqrt{4,5^2 + (10 - a)^2}$$

Mögliche Extremstellen findet man, wenn man folgende Gleichung löst:

$$0 = L'(a) = \left(\sqrt{6^2 + a^2} + \sqrt{4,5^2 + (10 - a)^2} \right)'$$

Benutzt man ein CAS so erhält man, dass die Funktion $L(a)$ eine Minimumstelle für $a = \frac{40}{7}$ hat.

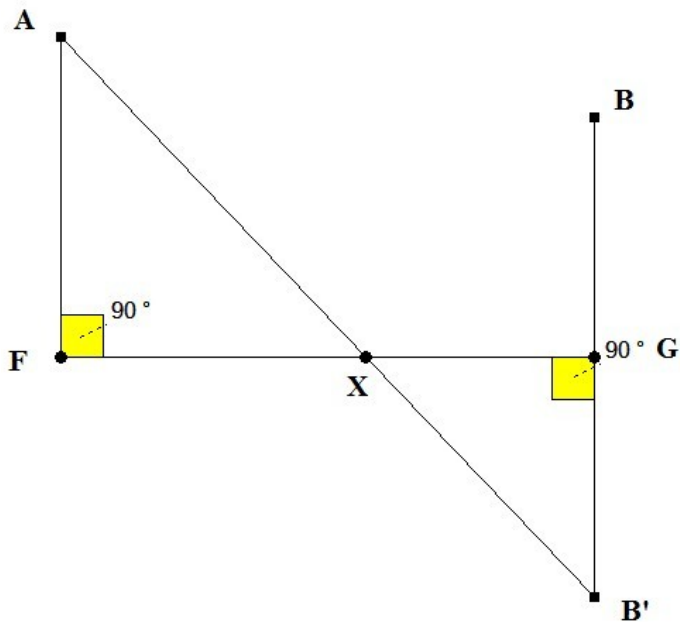
Für die minimale Länge gilt wegen

$$6^2 + a^2 = \overline{AX}^2, \quad 4,5^2 + (10 - a)^2 = \overline{BX}^2 \text{ und}$$

$$L\left(\frac{40}{7}\right) = \sqrt{6^2 + \left(\frac{40}{7}\right)^2} + \sqrt{4,5^2 + \left(10 - \frac{40}{7}\right)^2} = 14,5$$

Also ist die minimale Länge 14,5 km lang. Aufgrund des ersten Angebotes ist das zweite Angebot nicht so günstig wie das erste.

Man kann auch die minimale Länge des 2. Angebots durch eine maßstabsgerechte Konstruktion ermitteln. Vergleiche dazu das untenstehende Bild:



Man spiegelt die Strecke \overline{BG} an der Strecke \overline{FG} und erhält B' . Die Strecke $\overline{AB'}$ ist die gesuchte minimale Länge.

Aufgabe 2

Die Qualitätsprüfung Q3

Es ist hilfreich ein Urnenmodell zu benutzen mit roten (guten) und schwarzen (schlechten) Ausgängen.

1. Kontrolle: Guss: 4 rote Kugeln, 1 schwarze Kugel;
2. Kontrolle: Masse: 85 rote, 15 schwarze Kugel;
3. Kontrolle: Bruch: 9 rote, 1 schwarze Kugel.

Die Wahrscheinlichkeit alle drei Kontrollen zu durchlaufen beträgt: $P(rrr) = \frac{4}{5} \cdot \frac{85}{100} \cdot \frac{9}{10} = 0,612$.

Aufgabe 3

Der Beweis

Wegen $0 < a < b \Rightarrow a^2 < b^2$. Daraus folgt $a^2 + 2ab < b^2 + 2ab$.

$\Rightarrow a(a + 2b) < b(2a + b)$. Dividiert man beide Seiten der Ungleichung

mit $a \cdot b$, so erhält man $\frac{a + 2b}{b} < \frac{2a + b}{a}$.