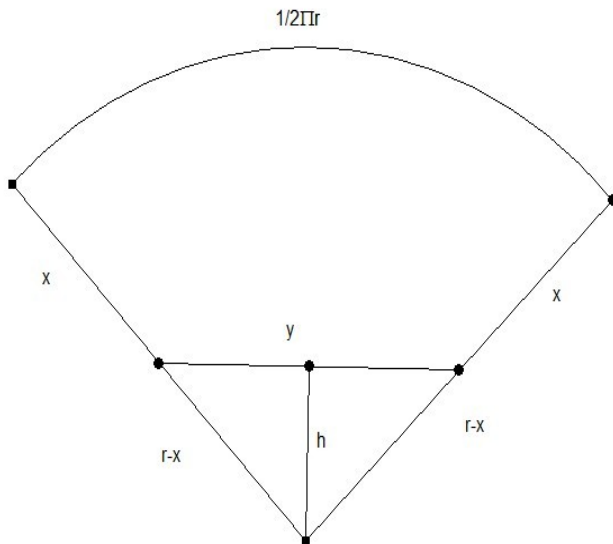


Aufgabe 1

Flächenvergleich

(Skizze von Moritz K. aus Mettmann)



Im abgeschnittenen rechtwinklig-gleichschenkligen Dreieck gilt nach dem Satz des Pythagoras und mit der Bedingung der Umfangsgleichheit:

$$(r - x)^2 = h^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 2h^2 \quad (1)$$

$$\frac{1}{4} \cdot 2\pi r + y + 2x = y + 2(r - x)$$

$$\Leftrightarrow 8x = 4r - \pi r \Leftrightarrow x = \left(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{8}\right)r \quad (2)$$

Die Flächeninhalte von Dreieck und Bogenstück werden mit F_D bzw. F_B bezeichnet; damit gilt:

$$F_D = \frac{1}{2} y h = \frac{1}{4} y^2 = h^2 = \frac{1}{2} (r - x)^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{8}\right)^2 r^2 \quad (3) \text{ nach(1) und(2)}$$

$$F_B = \frac{1}{4} \pi r^2 - F_D = \frac{1}{4} \pi r^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{8}\right)^2 r^2 \quad (4)$$

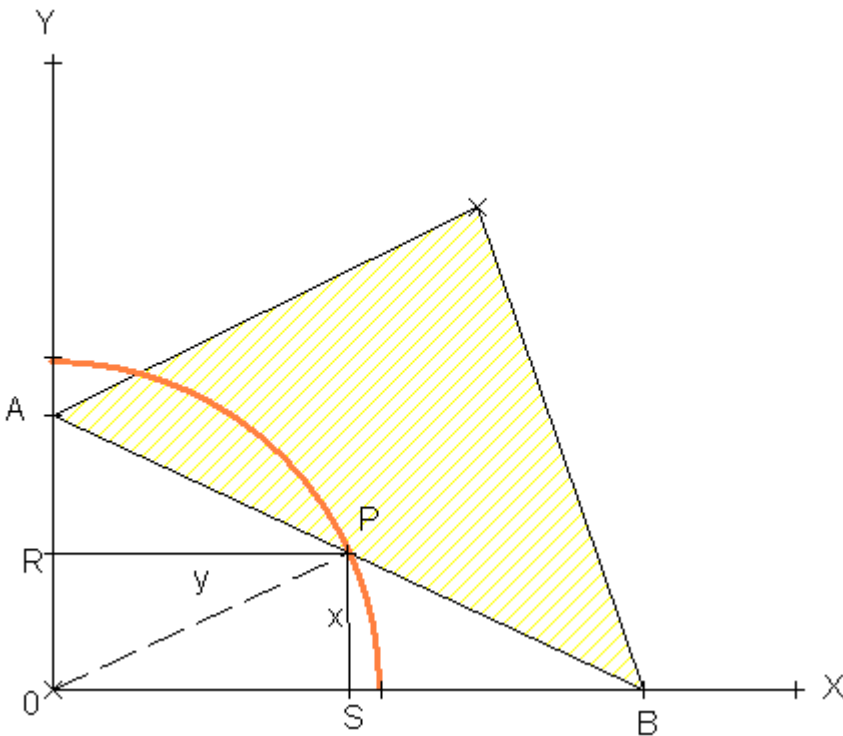
$$\frac{F_B}{F_D} = \frac{\frac{1}{4} \pi r^2}{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{8}\right)^2 r^2} - 1 = \frac{\frac{\pi}{4}}{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{\pi}{8}\right)^2} - 1 = \frac{32\pi}{(4 + \pi)^2} - 1 \approx 0,9711 \text{ nach(3) und(4)}$$

$$\text{bzw. } \frac{F_D}{F_B} \approx 1,02975$$

Das Dreieck hat also einen um etwa 3% größeren Flächeninhalt als das Bogenstück.

Aufgabe 2

Spurensuche



In der Skizze stehen die Koordinatenachsen für die benachbarten Hefränder, das gelbe Dreieck fürs Geodreieck; es kommt aber nur auf die Hypotenuse AB und ihren Mittelpunkt P an. PR ist das Lot von P auf die y-Achse, PS das Lot auf die x-Achse. Damit liegen O, A und R auf der y-Achse, O, S und B auf der x-Achse. Die Länge der Hypotenuse sei h. Dann gilt

$$\frac{\overline{PR}}{\overline{BO}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{AB}} = \frac{1}{2} = \frac{\overline{AR}}{\overline{AO}} \text{ nach dem 1. und dem 2. Strahlensatz}$$

Damit ist R Mittelpunkt von \overline{OA} , S derjenige von \overline{OB} .

$\overline{RS} \perp \overline{AB}$ (Umkehrung des 2. Strahlensatzes)

Die Länge von \overline{RS} ist halb so groß wie die von \overline{AB} , $\frac{1}{2}h$, also fest.

$$\overline{RS}^2 = \overline{OP}^2 = \left(\frac{h}{2}\right)^2 = x^2 + y^2 \Leftrightarrow y^2 = \left(\frac{h}{2}\right)^2 - x^2 \text{ ("Kreisgleichung")}$$

Die Rahmenbedingungen $x \geq 0$ und $y \geq 0$ liefern für $0 \leq x \leq \frac{h}{2}$ als S nur einen Viertelkreis um O mit Radius $\frac{h}{2}$.

Aufgabe 3

Zeitungsnotiz

(nach Moritz K. aus Mettmann)

Diese Aussage ist falsch! Betrachten wir dazu ein Zahlenbeispiel. Nehmen wir an, dass wir 100 Haushalte betrachten. Demnach leben in 51% von diesen, also in 51 Haushalten, Singles. Es sind folglich 51 Personen die -nach Zeitungsnotiz- einsam leben.

Hingegen leben in 49% der Haushalte zwei oder mehr Personen. Wenn man davon ausgeht, dass mindestens zwei Personen in diesen Haushalten leben, dann wohnen dort mindestens 98 Personen, die nicht einsam sind.

Wir haben in 100 Haushalten also 51 vereinsamte Personen und 98 Personen mit Gesellschaft. Nach dieser Rechnung würden weniger als 34,3% einsam leben!