www.mathe-treff.de

Mathetreff: Lösungen zu den Knobelaufgaben

für die Klassen 9 und 10
November - Dezember 2010

Aufgabe 1

Weihnachtsmanngerangel

Die Menge, die jeder der Weihnachtsmänner Knut (a), Kurt (b), Curtis (c), Kuno (d) und Karol (e) an Geschenken zugeteilt bekommen hat, sei mit a, b, c, d, e bezeichnet.
Aus der Aufgabenstellung folgt, dass alle zusammen 150 Geschenke bekommen haben: Also gilt:
a+b+c+d+e=150 (1)
Am Anfang macht Kurt den Vorschlag, die Geschenke gleichmäßig aufzuteilen, wobei er dann seine Geschenke behalten würde und weder gewinnen noch verlieren würde. Also hatte er genau ein Fünftel der Geschenke, b=150/5=30, also hatte Kurt 30 Geschenke.

Nachdem Knut weggeflogen ist, macht Curtis den Vorschlag, die Geschenke unter den verbleibenden 4 Weihnachtsmännern aufzuteilen, wobei er dann derjenige wäre, der weder verlieren noch gewinnen würde. Er hatte also genau ein Viertel von den übrig gebliebenen Geschenken: (150-a)/4=c
Nachdem Vorbild von Kurt und Curtis macht nun auch Kuno den Vorschlag die Geschenke gleichmäßig aufzuteilen, da ihm nun weder Vorteil noch Nachteil entstehen würde. Somit gilt:
d=(150-a-b)/3=(150-a-30)/3=(120-a)/3
Es bleiben so nur Kuno und Karol zurück, wobei Karol weniger Geschenke als Kuno hatte. Es gilt also: e=d-2, und eingesetzt in (1) ergibt sich
a+b+c+d+e=150
=> a+30+(150-a)/4+(120-a)/3+(120-a)/3-2=150
=>a+(150-a)/4+(120-a)/3+(120-a)/3=122 | *12
=>12a+3*150-3a+4*120-4a+4*120-4a=12*122
=>12a-3a-4a-4a=12*122-3*150-4*120-4*120
=>a=54
Also hatte Knut 54 Geschenke, Kurt 30 Geschenke, Curtis 24 Geschenke, Kuno 22 Geschenke und Karol 20 Geschenke.

Aufgabe 2

Quadratische Gleichungen überall

Mit p/-q Formel hat die quadratische Gleichung die Lösungen

$$x_1 = \frac{a}{2} \quad \sqrt{\frac{a^2}{4} + \quad a},$$

$$x_2 = \frac{a}{2} \quad \sqrt{\frac{a^2}{4} \quad a}$$

die beide reell sind. Der Radikant muss für zwei reelle Lösungen jeweils positiv sein, es ergibt sich also das a>4 oder a<0 sein muss. Eingesetzt in die Ungleichung ergibt sich:

$$x_1 + x_2 \le \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - a} + \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - a} \le \frac{1}{2} * \left[\left(\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - a}\right)^2 + \left(\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - a}\right)^2\right]$$

$$\Leftrightarrow a \le \frac{1}{2} * \left[\left(\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - a}\right)^2 + \left(\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - a}\right)^2\right]$$

$$\Leftrightarrow 2a \le \frac{a^2}{4} + a * \sqrt{\frac{a^2}{4} - a} + \frac{a^2}{4} - a + \frac{a^2}{4} - a * \sqrt{\frac{a^2}{4} - a} + \frac{a^2}{4} - a$$

$$\Leftrightarrow 2a - a^2 \le 2a$$

$$\Leftrightarrow 0 \le a^2$$

Diese Ungleichung ist somit für alle quadratischen Gleichungen, die zwei reelle Lösungen haben, da Quadratzahlen stets nichtnegativ sind.

Aufgabe 3

Lebkuchenbäckerei

Es kommen nur Quadrate in Betracht, die die Größe 1x1 bis n x n haben.
Für ein a x a Quadrat gibt es waagerecht und senkrecht jeweils 11-n Möglichkeiten der Anordnung.
Das heißt als insgesamt: ((n+1)-a)*(11-a)=((n+1)-a)^2
Setzt man jetzt für a die natürlichen Zahlen 1,2,3...,n-1,n ein erhält man:
n^2+(n-1)^2+...+2^2+1^2=n(n+1)(2n+1)/6
Es gibt also n(n+1)(2n+1)/6 Möglichkeiten Quadrate aus dem Teig zu bilden.