www.mathe-treff.de

Mathetreff: Lösungen zu den Knobelaufgaben für die Oberstufe

November - Dezember 2010

Aufgabe 1

Weihnachtsmanngerangel

Die Menge, die jeder der Weihnachtsmänner Knut (a), Kurt (b), Curtis (c), Kuno (d) und Karol (e) an Geschenken zugeteilt bekommen hat, sei mit a, b, c, d, e bezeichnet.
Aus der Aufgabenstellung folgt, dass alle zusammen 150 Geschenke bekommen haben: Also gilt: a+b+c+d+e=n (1)
Am Anfang macht Kurt den Vorschlag, die Geschenke gleichmäßig aufzuteilen, wobei er dann seine Geschenke behalten würde und keins dazubekäme. Also hatte er genau ein Fünftel aller der Geschenke, es gilt b=n/5.
Nachdem dann Knut weggeflogen ist, macht Curtis den Vorschlag, die Geschenke unter den übrigen 4 Weihnachtsmänner aufzuteilen, wobei er dann nichts gewinnen oder verlieren würde. Er hat also hier von den übrig gebliebenen Geschenken genau ein Viertel. Also folgt
(n-a)/4=c
Nachdem Vorbild von Kurt und Curtis macht nun auch Kuno den Vorschlag die Geschenke gleichmäßig aufzuteilen, da ihm nun weder ein Vorteil noch ein Nachteil entstehen würde:
d=(n-a-b)/3=(n-a-(n/5))/3
Da Curtis davonfliegt, als Kuno die Geschenke zwischen Curtis, Karol und sich selbst aufteilen will, hatte Karol am wenigsten Geschenke bekommen. Es gilt also e=d-2. Eingesetzt in (1) ergibt sich:

$$a+b+c+d+e=n$$
$$\Leftrightarrow a+\frac{n}{5}+\frac{n-a}{4}+\frac{n-a-\frac{n}{5}}{3}+\frac{n-a-\frac{n}{5}}{3}-2=n$$
$$\Leftrightarrow 12a+\frac{12}{5}n+3(n-a)+4(n-a-\frac{n}{5})*2-24=12n$$
$$\Leftrightarrow 60a+12n+15n-15a+40n-40a-4n-24*5=60n$$
$$\Leftrightarrow 5a+59n-120=60n$$
$$\Leftrightarrow 5a-n-120=0$$
$$\Leftrightarrow 5a=n+120$$
$$\Leftrightarrow a=\frac{n+120}{5}=\frac{1}{5}n+24$$

Also hatte Knut 1/5*n +24 Geschenke, Kurt (n/5), Curtis (n-a)/4)= 1/5*n-6, Kuno 1/5*n-8 und Karol 1/5*n-10 Geschenke.

Aufgabe 2

Verzwickte Ungleichung

Die Ungleichung lässt sich durch Umformungen zeigen:

$$\frac{1}{2}\left(\left(x\frac{a}{b}+y\right)^2+\left(x\frac{b}{a}+y\right)^2\right)\geq(x+y)^2$$
$$\Leftrightarrow \frac{x^2a^2}{b^2}+y^2+2xy\frac{a}{b}+\frac{x^2b^2}{a^2}+y^2+2xy\frac{b}{a}\geq 2*(x+y)^2$$
$$\Leftrightarrow x^2\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}\right)+2xy\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+2y^2\geq 2(x^2+2xy+y^2)$$
$$\Leftrightarrow x^2\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{a^2}-2\right)+2xy\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2\right)\geq 0$$
$$\Leftrightarrow x^2\left(\frac{a^4+b^4-2a^2b^2}{a^2b^2}\right)+2xy\left(\frac{a^2+b^2-2ab}{ab}\right)\geq 0$$
$$\Leftrightarrow x^2\left(\frac{(a^2-b^2)^2}{a^2b^2}\right)+2xy\left(\frac{(a-b)^2}{ab}\right)\geq 0$$

Nach Voraussetzung gilt, dass a,b,x, y nichtnegative reelle Zahlen sind. Somit gilt die letzte Ungleichung, und somit ist die Ungleichung bewiesen.

Aufgabe 3

Wichtelpunsch

Sei x die Menge des frischen Himbeersaftes. Es gilt x+10x =11x ist der Punsch, der aus 11 Einheiten besteht. Sei im Winter G der Preis für eine Einheit Himbeersaft, dann kostet eine Einheit des Erdbeersafts im Winter 2G, 11 Einheiten Punsch also G+20G=21G.
Im Frühling kostet der Himbeersaft immer noch G pro Einheit, während der Erdbeersaft nur noch 2G*0,8=1,6G kostet. 11 Einheiten Punsch kosten also im Frühjahr nur noch G+16G=16G. Die Wichtel sparen also 4G / 11 Einheiten Punsch. Mit diesen gesparten 4G können sie nun mehr produzieren, die Menge des darin enthaltenen Himbeersaftes sei y:

$$y+10*1,6*y=4$$
$$\Leftrightarrow y*(1+16)=4$$
$$\Leftrightarrow 17y=4$$
$$\Leftrightarrow y=\frac{4}{17}$$

Insgesamt werden also 4/17+40/17=44/17 Einheiten mehr produziert.
Die anfangs gewählten 11 Einheiten entsprechen 100% der ursprünglichen Menge, somit entsprechen 44/17 ca. 23,529 % der ursprünglichen Menge. Die Produktionsmenge kann also um ca. 23,529% gesteigert werden.