www.mathe-treff.de

Mathetreff: Lösungen zu den Knobelaufgaben für die Klassen 9 und 10 (Sekundarstufe I) Januar- Februar 2011

Aufgabe 1

Verschlüsseltes

ZWEI	8624	3624	8927	3927	8639	4639	8432	5432	9236	4236	7248	6248
VIER	3427	8427	3724	8724	4932	8932	5239	8239	4635	9635	6843	7843
SECHS	12051	12051	12651	12651	13571	13571	13671	13671	13871	13871	14091	14091
Lösung	6A	6B	5A	5B	1A	1B	2A	2B	7A	7B	3A	3B

		(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
(1)			**Z**	**W**	**E**	**I**
(2)	**+**		**V**	**I**	**E**	**R**
(3)	**=**	**S**	**E**	**C**	**H**	**S**

(4) Erste Erkenntnis: S=1; denn der Zehntausender in Spalte (a) ist der Übertrag aus der Summe zweier vierstelliger Dezimalzahlen.
(5) In (e) sind sowohl R alsauch I von Null verschieden, weil I, R und S drei verschiedene Zahlen sein müssen.
(6) Nach (4) und (5) folgt I + R = 11, also der Übertrag 1 in Spalte (d).
(7) Aus (6) und (d) folgt mit 2E+1=H, dass H ungerade sein muss; H aus {3, 5, 7, 9}.
(8) Nach (7) gilt
(I/R) stammt aus {(9/2), (2/9), (8/3), (3/8), (7/4), (4/7), (6/5), (5/6)}.
Nun werden die einzelnen Fälle der Reihe nach untersucht.

1. Fall (I/R)=(9/2)
Es wird kein Übertrag nach (c) berücksichtigt, weil sonst W=C den Voraussetzungen widerspräche; also gilt hier E=3 (Fall 1.1) oder E=4 (Fall 1.2) wegen H<9.
Zu 1.1:
Aus E=3 und H=7 folgt C=5 und W=6 (siehe (c)) Für V und Z bleiben noch die Ziffern 4 und 8 übrig. Das sind die Lösungen 1A und 1B in obiger Übersicht.
Zu 1.2:
E=4 und H=9 ist nicht möglich wegen I=9

2. Fall (I/R)=(2/9)
Wegen E>2 und H<9 gilt -unter Beachtung von (7)- auch hier E=3 und H=7. Damit erfolgt kein Übertrag nach (c). C=W+2 oder W+2=10
Für W<9 und C>2 betrachten wir hier nachfolgende Fälle (C/W)=(0/8) mit Übertrag 1 in (b)(Fall 2.1) und C ist 6 oder 8 (Fall 2.2).
Zu 2.1:
Wegen des Übertrags nach (b) müsste Z+V=12 gelten. Das gelingt nur mit 7+5=8+4=9+3, doch

jeweils ein Summand ist schon vergeben. Das ergibt keine weiteren Lösungen.
Zu 2.2:
Nun wird kein Übertrag nach (b) berücksichtigt. Das bedeutet Z+V=13 = 8+5=5+8; andere Summanden stehen -ohne Widerspruch zu Vorgaben- nicht zur Verfügung. Damit entfällt C=8. C=6 und W=4 liefern die Lösungen 2A und 2B.

3. Fall: (I/R)=(8/3) Nachfolgende Fälle sind möglich.
Fall 3.1: Es wird kein Übertrag nach (c) berücksichtigt.
Fall 3.1.1: (E/H)=(4/9) liefert keinen Übertrag nach (c). $1<W<8$ bewirkt Übertrag 1 nach (b). Für (W,C,V,Z) sind mögliche Besetzungen (2,0,6,7) und (2,0,7,6); siehe Lösungen 3A und 3B. Für (W,C)=(7,5) bliebe für (Z,V) nur die Besetzung (6/6), was nicht sein darf.
Fall 3.1.2: (E/H)=(2/5) ist noch denkbar. Für (W/C) ist dann nur (9/7) frei; es folgte aber der Widerspruch V=Z=6.
Fall 3.2: Nun wird der Übertrag 1 nach (c) berücksichtigt.
Einzige Besetzung für H ist H=5. Dann gilt E=7. W+9 liefert den Übertrag 1 nach (b). Folglich müsste gelten V+Z=16 =8+8=9+7=7+9 - diese Besetzungen sind nicht möglich.

4. Fall (I/R)=(3/8)
Fall 4.1: Es wird kein Übertrag nach (c) berücksichtigt.
Fall 4.1.1 H=5 und E=2.
W=0 lieferte einen Widerspruch zu den Voraussetzungen.
W=4 und C=7 würde V+Z=12 = 3+9=9+3=4+8=8+4=5+7=7+5=6+6 zur Folge haben; für (V/Z) gibt es keine widerspruchsfreie Besetzung.
W=6 und C=9 liefern ebensfalls keine Besetzungsmöglichkeiten für (V/Z).
W=7 und C=0 mit Übertrag 1 nach (b) liefern ebensfalls keine Besetzungsmöglichkeiten für (V/Z).
Fall 4.1.2 H=7 würde E=3=I widersprechen.
Fall 4.1.3 H=9 und E=4.
W=2 und C=5 liefern keine widerspruchsfreie Besetzung für (V/Z).
W=5 hätte den Widerspruch C=8=R zur Folge.
W=6 hätte den Widerspruch C=9=H zur Folge.
W=7 und C=0 liefern den Übertrag 1 nach (b). V+Z=13 ist mit den verbliebenen Zahlen 2, 5 und 6 nicht aufgabengemäß zu erreichen.
Fall 4.2 Es wird der Übertrag 1 nach (c) berücksichtigt.
Fall 4.2.1: H=5 und E=7
W=2 und C=6 würden V+Z=17=8+9=9+8 zur Folge haben. Dafür stehen keine widerspruchsfreien Summanden zur Verfügung.
W=5 und C=9. Dafür stehen ebenfalls keine widerspruchsfreien Summanden zur Verfügung.
W=6 und C=0 mit Übertrag 1 nach (b) ergäben V+Z=16=9+7=7+9=8+8. Alle Aspekte liefern Widersprüche.
Es gibt keine widerspruchsfreien Besetzungen für W.
Fall 4.2.2: H=7 widerspricht E=8=R.
Fall 4.2.3: H=9 und E=9 widersprechen der Voraussetzung.

5. Fall (I/R)=(7/4) H=3, H=5 oder H=9 ist denkbar.
Fall 5.1: Es wird kein Übertrag nach (c) berücksichtigt.
H=3 und E=1=S widersprechen der Voraussetzung.
H=5 und E=2 bedeuten mit W>3 Übertrag 1 nach (b).
W=3 liefert mit C=0 für (V/Z) keine zulässigen Besetzungsmöglichkeiten wegen Z+V=11 =9+2=8+3=7+4=6+5.
W=6 liefert mit C=3 für (V/Z) keine zulässigen Besetzungsmöglichkeiten wegen Z+V=11 =9+2=8+3=7+4=6+5.
W=8 liefert den Widerspruch C=5=H.
W=9 hat C=6 zur Folge. Für (V/Z) ergeben sich nun die Besetzungen (3/8) bzw. (8/3); siehe Lösungen 5A und 5B.
H=9 mit E=4 ist nicht möglich.

Fall 5.2: Es wird der Übertrag 1 nach (c) berücksichtigt.
H=9 erforderte E=9, was nicht sein darf.
H=5 würde E=7=I widersprechen.
H=3 und E=6 erzwingen die Besetzung (C/W)=(0/2) mit Übertrag nach (b). Damit verbleiben aber für V+Z=15 keine widerspruchsfreien Besetzungsmöglichkeiten.

6. Fall (I/R)=(4/7)
Fall 6.1 ohne Übertrag nach (c)
6.1.1 H=3 widerspricht E=1=S.
6.1.2 H=5 und E=2 bieten für C nur die Besetzungen 3,6, 8 oder 9.
W=3 widerspricht C=7=R.
W=6 liefert C=0 mit Übertrag 1 in (b). Z+V=11=9+2=8+3=7+4=6+5 weist auf die Lösungen 6A und 6B als einzige in diesem Fall hin.
W=8 widerspricht C=2=E.
W=9 liefert C=3 mit Übertrag 1 in (b). Z+V=11=9+2=8+3=7+4=6+5 liefert keine Besetzung für (V/Z).
6.1.3 H=9 widerspricht E=4=I.

Fall 6.2: mit Übertrag 1 in (c)
6.2.1 H=3 und E=6 erfordert die Besetzung (C/W)=(0/5) mit Übertrag 1 in (b). V+Z=15=8+7=7+8 weist unter den übrig gebliebenen Zahlen keine Besetzungsmöglichkeiten aus.
6.2.2 H=5 widerspricht E=7=R.
6.2.3 H=9 widerspricht E=9.

7. Fall (I/R)=(6/5)
Fall 7.1: ohne Übertrag nach (c)
7.1.1: H=3 widerspricht E=1=S.
7.1.2: H=7 und E=3 führt zur Unterscheidung folgender Fälle.
7.1.2.1: W=2 und C=8 liefert mit V+Z=13=9+4=8+5=7+6 die Besetzungen (V/Z)=(9/4) bzw. (V/Z)=(4/9). Siehe Lösungen 7A und 7B.
7.1.2.2: W=4 und C=0 mit Übertrag 1 in (b) liefert keine Lösung, weil Summanden in den Summen V +Z=12=9+3=8+4=7+5=6+6 schon vergeben sind.
7.1.2.3: W=9 widerspricht C=5=R.
7.1.3: H=9 und E=4 führt zu folgender Fallunterscheidung.
7.1.3.1 W=2 und C=8 liefert keine Lösung wegen Widersprüchen in der Zuordnung von Zahlenpaaren für (V/Z) -man beachte V+Z=14=9+5=8+6=7+7.
7.1.3.2 W=7 und C=3 mit Übertrag 1 in (b) liefert keine Lösung wegen Widersprüchen in der Zuordnung von Zahlenpaaren für (V/Z) -man beachte V+Z=13=9+4=8+5=7+6.

Fall 7.2: mit Übertrag 1 nach (c)
7.2.1: H=3 widerspricht E=6=I
7.2.2: H=7 und E=8 führt auf
7.2.2.1: W=2 und C=9 liefert den Widerspruch V=Z=9.
7.2.2.2: W=3 und C=0 mit Übertrag 1 in (b) liefert keine widerspruchsfreie Besetzung für (V/Z) wegen V+Z=17=9+8.
7.2.3: H=9 widerspricht E=9.

8. Fall (I/R)=(5/6)
8.1: ohne Übertrag in (c)
H=3 führt zum Widerspruch E=1=S.
H=7 und E=3 ermöglichen a) (C/W)=(9/4) bzw. b) (C/W)=(4/9) mit Übertrag 1 in (b).
zu a) Mit V+Z=13=9+4=8+5=7+6 finden sich keine zulässigen Besetzungen für (V/Z).
zu b) Mit V+Z=12=9+3=8+4=7+5=6+6 finden sich ebenfalls keine Lösungen.
H=9 und E=4 ermöglichen c) (C/W)=(7/2) oder auch (8/3) bzw. d) (C/W)=(2/7) mit Übertrag 1 in (b) oder auch (C/W)=(3/8) mit Übertrag 1 in (b).
zu c) (C/W)=(7/2) scheitert an fehlender widerspruchsfreier Besetzung von (V/Z) wegen V +Z=14=9+5=8+6=7+7.

Nun sei (C/W)=(8/3). Es gibt ebenfalls keine widerspruchsfreie Besetzung von (V/Z) wegen V +Z=14=9+5=8+6=7+7.
zu d) (C/W)=(2/7) scheitert an fehlender widerspruchsfreier Besetzung von (V/Z) wegen V +Z=13=9+4=8+5=7+6.
Nun sei (C/W)=(3/8). Es gibt ebenfalls keine widerspruchsfreie Besetzung von (V/Z) wegen V +Z=13=9+4=8+5=7+6.

8.2: mit Übertrag 1 in (c)
H=3 führt zum Widerspruch E=6=R.
H=7 und E=8 ermöglichen e) (C/W)=(9/3) bzw. f) (C/W)=(0/4) mit Übertrag 1 in (b).
zu e) (V/Z) ist nicht besetzbar wegen V+Z=18=9+9.
zu f) (V/Z) ist nicht besetzbar wegen V+Z=17=9+8.
H=9 widerspricht E=9.

Zusammenfassung: Es gibt zwölf verschiedene Lösungen für ZWEI+VIER=SECHS.

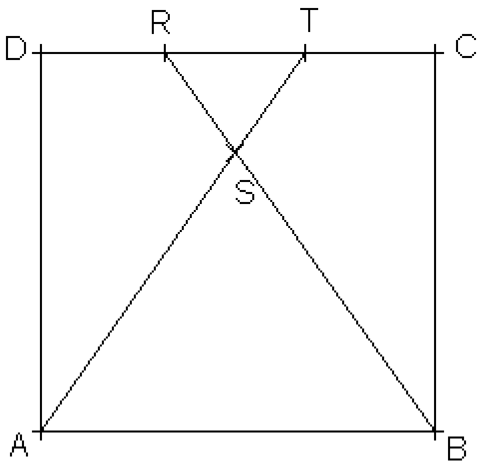
Aufgabe 2

20:11Uhr

Um 20:00Uhr war der Stundenzeiger genau auf der 8, 11min später ist er 11/60 von 30° (=5,5°) auf die 9 zugegangen. Der Minutenzeiger ist von 20:00Uhr in 11min 11/60 von 360° (=66°) von der 12 in Richtung 3 gewandert. Die Zeiger bilden also um 20:11Uhr einen Winkel von 120°+66°-5,5°=180,5° (bzw. 179,5° als Komplementärwinkel).

Aufgabe 3

Sanduhr-Quadrat?



Das Quadrat habe die Seitenlänge a.

$\triangle ATD$ *ist ein halbes gleichseitiges Dreieck mit Höhe AD.*

$\overline{DT}^2 + \overline{AD}^2 = \overline{AT}^2 = 4\overline{DT}^2$ *Satz des Pythagoras*

$\Leftrightarrow a^2 = 3\overline{DT}^2 \Leftrightarrow \overline{DT} = \frac{a}{3}\cdot\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow \overline{DR} = \overline{TC} = a - \frac{a}{3}\cdot\sqrt{3} = a\cdot(1-\frac{1}{3}\cdot\sqrt{3}) \approx 0{,}423\cdot a$

$\Leftrightarrow \overline{RT} = a - \frac{2}{3}a\sqrt{3}(\sqrt{3}-1) \approx 0{,}155a$

Damit sind die Positionen von R und T festgelegt.