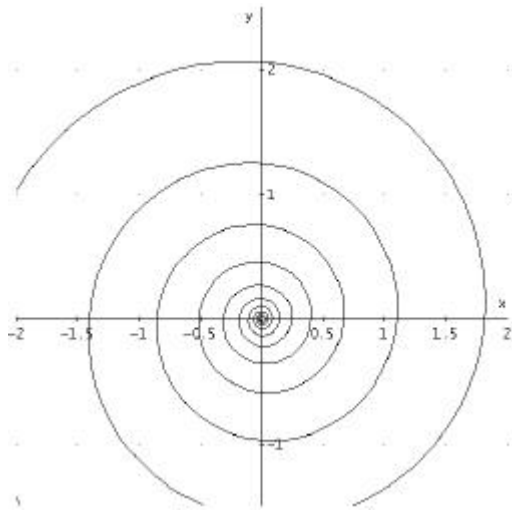


Kennen Sie eigentlich die logarithmische Spirale?



Die allgemeine Form der logarithmischen Spirale ist gegeben durch die Gleichung

$$r = a \cdot e^{bj}$$

mit $j \in \mathbb{R}$ und $a, b > 0$, wobei die Darstellung wie bei Spiralen üblich in Polarkoordinaten erfolgt. Die nebenstehende Zeichnung wurde mit Derive angefertigt: Man wählt unter *Einstellen/ Koordinatensystem* die Option *Polar*. Für das Bild habe ich $a=1,1$ und $b=0,08$ gewählt.

Die logarithmische Spirale kommt zuerst bei Dürer vor. Dann haben sich Descartes, Torricelli und andere mit dieser "vielleicht interessantesten aller ebenen Kurven" (Fladt) beschäftigt. Der Name der Kurve stammt von Pierre Varignon und ist so zu deuten: Setzt man $a=1$, so ist $\ln(r)$ proportional zum Winkel j .

Machen Sie nun Folgendes: Vergrößern Sie mit Derive die Kurve, Zoomen Sie in die Tiefe der Spirale und beobachten Sie. Es verändert sich nichts. Wie ist das zu verstehen? Wir wenden auf das Paar (r, j) eine zentrische Streckung gemäß

$$(r, j) \xrightarrow{z} (r', j') \text{ mit } r' = k \cdot r, k > 0 \text{ und } j' = j.$$

D. h. wir stecken in Richtung der Ursprungsgeraden und lassen die Winkel gleich. Man erhält dann

$$r' = k \cdot a \cdot e^{bj'}.$$

Wir setzen nun $y = \frac{\ln(k)}{b}$, also $k = e^{by}$, so ergibt sich $r' = a \cdot e^{b(j'+y)}$.

D. h., die gestreckte Spirale entsteht auch, wenn man die ursprüngliche Spirale mit y zurück dreht. Also verändert die Streckung eigentlich nichts. Drucken Sie eine schöne logarithmische Spirale aus, heften Sie sie im Ursprung an Ihre Pinwand und drehen Sie sie - die Spirale scheint zu wachsen oder zu schrumpfen, aber sie ändert sich nicht.

Das drückte Jacob Bernoulli so aus: "Eadem mutata resurgo", verändert und dennoch als derselbe werde ich auferstehen. Bernoulli ließ sich diesen Spruch auf seinen Grabstein meißeln und wünschte sich die logarithmische Spirale dazu. Aber er bekam leider das Bild

einer archimedische Spirale $r = a \cdot j$ auf seinen Stein. Der Steinmetz durchschaute die erforderliche Mathematik vielleicht nur begrenzt.

Literatur z. B. Schupp/Dabrock, Höhere Kurven, Mannheim 1995

(nev)