# Von Äpfeln und Birnen

## Über Unterschiede und Gemeinsamkeiten trotz mancher Differenzen

**Düsseldorf, den 25.05.10** *Der folgende Aufsatz findet seine Wurzeln beim aktuellen Lehrerfortbildungsangebot der Kompetenzteams NRW zum Thema „Vertiefungsfach Mathematik". In Anlehnung an das Material, was hierzu vom Schulministerium bereitgestellt wird, haben sich darüber hinaus die Moderatorinnen und Moderatoren der Bezirksregierung Düsseldorf unter Leitung von Egon Petrak (Dezernat 46) des Themas erneut angenommen.*

Das Ergebnis dieser Arbeit – inkl. der Unterlagen aus dem Ministerium – wird in den nächsten Wochen interessierten Kolleginnen und Kollegen über die jeweiligen Kompetenzteams präsentiert. Die Schulen haben die relevanten Informationen zu diesen Veranstaltungen inzwischen erhalten. Weitere Termine lassen sich über die KT-Plattform erfragen.

Das mittlerweile unter dem Stichwort „Vertiefungsfach Mathematik" sehr umfangreich geschnürte Päckchen wird den Teilnehmerinnen und Teilnehmern auf den Fortbildungsveranstaltungen wie gewohnt in Form eines vielseitigen Skriptes und als CD komplett zur persönlichen Verfügung überreicht. Natürlich würde das Moderatoren-Team einen zahlreichen Besuch der Veranstaltungen sehr begrüßen.

Im Rahmen der dezidiert auf die betreffenden Schülerinnen und Schüler der aktuellen Jahrgangsstufe 9 zugeschnittenen Unterrichtsangebote birgt die CD sicherlich viele Aspekte und Anregungen, die selbstverständlich auch in anderen Kontexten äußerst gewinnbringend eingesetzt werden können.

In eben diese Richtung zielt unter anderem der im Folgenden exemplarisch angesprochene Aufsatz. Parallel zum Aufgaben- und Übungsrahmen des Moduls „Exponentialfunktionen" versucht er bekannte Probleme, die mit diesem Thema verbunden sind, durch eingängige Verbalisierungen zu umgehen.

Dadurch ergibt sich für Schülerinnen und Schüler, die an dieser Stelle mit dem rein formalen Kalkül Schwierigkeiten haben, ein zusätzlicher Ansatzpunkt zum Verständnis der durchaus komplexen Zusammenhänge.

*Äpfel oder Birnen? Oder Äpfel und Birnen?*

Im Sinne entdeckenden Lernens kann an dem hier vorgestellten, so genannten Planetenmodell verdeutlicht werden, dass es unter Umständen sehr gewinnbringend ist, strukturell bedingte Analogien zu durchschauen. Was sich im Detail als relativ unterschiedlich erweist, entpuppt sich, aus einer gewissen Distanz betrachtet, plötzlich als sehr ähnlich. Es sind gerade diese Transfer-Leistungen, die uns helfen unser Wissen zu vernetzen und damit besser zu organisieren.

Um was geht es hier eigentlich?
Etwa um Äpfel oder Birnen?
Oder eher um Äpfel und Birnen?

# Das Planetenmodell für Exponentialfunktionen

Den folgenden Betrachtungen liegt die Tatsache zugrunde, dass sämtliche Exponentialfunktionen zu einer Basis $a \neq 1$ Isomorphismen darstellen. Deren Definitionsmenge besteht jeweils aus der additiven Gruppe der reellen Zahlen, während die multiplikative Gruppe der positiven reellen Zahlen als Zielmenge dieser, die Struktur erhaltenden, Abbildungen fungiert.

Um diesem Kontext anschaulich gerecht zu werden, verbinden wir das Modell eines sogenannten Plus-Planeten mit dem Modell eines sogenannten Mal-Planeten. Sämtliche Objekte[1] auf dem Plus-Planeten lassen sich entsprechend seiner Nominierung zu nichts anderem als zu Summen zusammenfassen. Auf dem Mal-Planeten sind hingegen nur Produkte mit den dort vorhandenen Objekten zulässig.

Interessanterweise gibt es zu jedem Objekt auf dem Plus-Planeten einen umkehrbar eindeutig bestimmten Partner auf dem Mal-Planeten[2]. Viel wichtiger ist aber darüber hinaus die Tatsache, dass die Verbindungen zwischen Plus- und Mal-Planeten strukturverträglich sind, was sich unter anderem wie folgt beschreiben lässt:

> These 1: *Es ist gleichgültig, ob man auf dem Plus-Planeten zwei Objekte* $\mathbf{x_1}$ *und* $\mathbf{x_2}$ *addiert und anschließend zum Partner* $\mathbf{M(x_1 + x_2)}$ *dieser Summe* $\mathbf{(x_1 + x_2)}$ *auf den Mal-Planeten wechselt, oder ob man zuerst die Partner der beiden Objekte* $\mathbf{x_1}$ *und* $\mathbf{x_2}$*, das heißt* $\mathbf{M(x_1)}$ *und* $\mathbf{M(x_2)}$*, auf dem Mal-Planeten betrachtet und dort schließlich deren Produkt* $\mathbf{M(x_1) \cdot M(x_2)}$ *berechnet. In jedem Fall landet man auf dem Mal-Planeten beim selben Objekt.*

In Kurzform lässt sich dieser Sachverhalt[3] so notieren: $\mathbf{M(x_1 + x_2) = M(x_1) \cdot M(x_2)}$

Die hiermit dargestellte Strukturverträglichkeit wird bei weiteren Operationen sichtbar.

Betrachten wir hierzu die Invertierung. Auf dem Plus-Planeten meinen wir damit den Vorzeichenwechsel, kurz *VZW* genannt. Das entsprechende Pendant auf dem Mal-Planeten stellt der Kehrwert, kurz *KW* genannt, dar. Es gilt nun folgender Zusammenhang:

> These 2: *Es ist gleichgültig, ob man ein Objekt* $\mathbf{x}$ *zunächst auf dem Plus-Planeten invertiert, das heißt zu* $\mathbf{(-x)}$ *übergeht und anschließend zum Partner dieses Inversen auf den Mal-Planeten, also zu* $\mathbf{M(-x)}$ *wechselt, oder ob man von* $\mathbf{x}$ *ausgehend zuerst den Planeten, das heißt zum Partner* $\mathbf{M(x)}$ *wechselt und dann diesen Partner zu* $\mathbf{1/\ M(x)}$ *invertiert. In jedem Fall landet man auf dem Mal-Planeten beim selben Objekt.*

In Kurzform lässt sich dieser Sachverhalt so notieren: $\mathbf{M(-x) = \dfrac{1}{M(x)}}$

1 In diesem Zusammenhang stellen die hier angesprochenen „Objekte“ in beiden Gruppen natürlich reelle Zahlen dar.
2 Inwieweit hier die Gleichmächtigkeit der gesamten Menge der reellen Zahlen zu ihrer echten Teilmenge in Form der positiven reellen Zahlen weiter thematisiert werden sollte, bleibt im Einzelfall abzuwägen. Sofern man innerhalb des hier favorisierten heuristischen Rahmens argumentiert, kann darauf jedoch sicher verzichtet werden.
3 Wir assoziieren mit dem Buchstaben „**M**“ die Sprechweise „Partner auf dem **M**al-Planeten“.

Falls man ein Objekt mit seinem Inversen verknüpft – sei es auf dem Plus-Planeten durch Addition des additiven Inversen, sei es auf dem Mal-Planeten durch Multiplikation mit dem multiplikativen Inversen – erhalten wir das sogenannte Neutrale. Dies wird auf dem Plus-Planeten offenbar durch die Null verkörpert, während auf dem Mal-Planeten die Eins die Rolle des Neutralen spielt. Es macht Sinn zu fordern, dass der Partner des additiven Neutralen das multiplikative Neutrale ist.

> These 3: *Der Partner des additiven Neutralen auf dem Plus-Planeten ist das multiplikative Neutrale auf dem Mal-Planeten.*

In Kurzform lässt sich dieser Sachverhalt so notieren: $\mathbf{M(0) = 1}$.

Kommen wir abschließend zum wiederholten, mehrmaligen Addieren desselben Summanden auf dem Plus-Planeten. Wir bilden demnach auf dem Plus-Planeten eine „längere“ Summe, indem wir wiederholt denselben Summanden addieren.

Dann ist natürlich sofort klar, dass wir statt der Schreibweise $\mathbf{x + x + x + x + \ldots + x}$ lieber $\mathbf{n \cdot x}$ notieren, um anzudeuten, dass der Summand $\mathbf{x}$ hier $\mathbf{n}$-mal auftritt.

Was passiert nun beim Wechsel zum jeweiligen Partner $\mathbf{M(x)}$ auf dem Mal-Planeten? Offenbar entsteht dort ein „längeres“ Produkt, indem wir fortwährend mit demselben Faktor multiplizieren, das heißt, wir müssen auf dem Mal-Planeten $\mathbf{M(x) \cdot M(x) \cdot M(x) \cdot M(x) \cdot \ldots \cdot M(x)}$ bestimmen.

Damit ist ebenfalls klar, dass wir statt der Schreibweise $\mathbf{M(x) \cdot M(x) \cdot M(x) \cdot M(x) \cdot \ldots \cdot M(x)}$ lieber $\mathbf{(M(x))^n}$ notieren, um anzudeuten, dass der Faktor $\mathbf{M(x)}$ hier $\mathbf{n}$-mal vorkommt.

> These 4: *In einer Summe auf dem Plus-Planeten trete dasselbe Objekt* $\mathbf{x}$ *insgesamt* $\mathbf{n}$*-mal auf. Dementsprechend finden wir auf dem Mal-Planeten* $\mathbf{n}$*-viele Partner* $\mathbf{M(x)}$. *Es ist dann gleichgültig, ob man diese Situation auf dem Plus-Planeten zunächst durch das Produkt* $\mathbf{n \cdot x}$ *beschreibt, um anschließend zum Partner* $\mathbf{M(n \cdot x)}$ *auf den Mal-Planeten zu wechseln, oder stattdessen zuerst von jedem einzelnen* $\mathbf{x}$ *ausgehend dessen Partner* $\mathbf{M(x)}$ *auf dem Mal-Planeten bestimmt, um dort abschließend das folgende Produkt zu ermitteln:* $\mathbf{M(x) \cdot M(x) \cdot M(x) \cdot M(x) \cdot \ldots \cdot M(x) = (M(x))^n}$

In Kurzform lässt sich dieser Sachverhalt so notieren: $\mathbf{M(n \cdot x) = (M(x))^n}$.

Wir reduzieren die oben genannten Thesen, um sie übersichtlicher formulieren zu können.

> These 1: $\mathbf{M(x_1 + x_2) = M(x_1) \cdot M(x_2)}$
>
> *Es ist gleichgültig, ob man zuerst auf dem Plus-Planeten zwei Objekte addiert und anschließend zum Partner dieser Summe auf den Mal-Planeten wechselt, oder ob man stattdessen zunächst die Partner der beiden Summanden auf dem Mal-Planeten betrachtet und dort deren Produkt berechnet.*

These 2: $\mathbf{M(-x)} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{M(x)}}$

*Es ist gleichgültig, ob man ein Objekt zuerst additiv invertiert und anschließend zum Partner dieses Inversen auf dem Mal-Planeten wechselt, oder ob man stattdessen zunächst den Partner auf dem Mal-Planeten bestimmt und dann diesen Partner dort multiplikativ invertiert.*

These 3: $\mathbf{M(0) = 1}$

*Der Partner des additiven Neutralen ist das multiplikative Neutrale.*

These 4: $\mathbf{M(n \cdot x) = (M(x))^n}$

*Es ist gleichgültig, ob man eine wiederholte Addition desselben Summanden auf dem Plus-Planeten zunächst als ein Produkt beschreibt, um anschließend zum Partner dieses Produktes auf den Mal-Planeten zu wechseln, oder stattdessen zuerst von jedem einzelnen Summanden ausgehend dessen Partner auf dem Mal-Planeten bestimmt, um dort das wiederholte Produkt dieser Partner durch eine Potenz zu beschreiben.*

Abschließend modifizieren wir unsere Thesen auf ein sehr abstraktes Mindestmaß.

These 1: $\mathbf{M(x_1 + x_2) = M(x_1) \cdot M(x_2)}$

*Es ist gleichgültig, ob man zuerst verknüpft und dann den Planeten wechselt, oder ob man stattdessen zunächst den Planeten wechselt und anschließend dort verknüpft.*

These 2: $\mathbf{M(-x)} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{M(x)}}$

*Es ist gleichgültig, ob man zuerst invertiert und dann den Planeten wechselt, oder ob man stattdessen zunächst den Planeten wechselt und anschließend dort invertiert.*

These 3: $\mathbf{P(0) = 1}$

*Der Partner des Neutralen ist das Neutrale.*

These 4: $\mathbf{M(n \cdot x) = (M(x))^n}$

*Es ist gleichgültig, ob man eine wiederholte Verknüpfung zuerst abkürzend beschreibt und dann den Planeten wechselt, oder ob man stattdessen zunächst den Planeten wechselt und anschließend dort die wiederholte Verknüpfung abkürzend beschreibt.*

Wir fassen die entsprechenden Rechengesetze nochmals tabellarisch zusammen, wobei wir direkt die entsprechenden Formulierungen für die umgekehrte Richtung, das heißt vom Mal- zum Plus-Planeten ergänzen. Um auf die umgekehrte Blickrichtung aufmerksam zu machen, verwenden wir für den Wechsel zum Partner statt des Buchstabens **„M“** den Buchstaben **„P“** (vgl. Fußnote 3). Speziell gelten die Beziehungen **M(P(x)) = x** bzw. **P(M(x)) = x**, das heißt **M** und **P** sind Umkehrfunktionen voneinander.

| | vom Mal- zum **P**lus-Planeten | vom Plus- zum **M**al-Planeten |
|---|---|---|
| These 1 | $\mathbf{P(x_1 \cdot x_2) = P(x_1) + P(x_2)}$ | $\mathbf{M(x_1 + x_2) = M(x_1) \cdot M(x_2)}$ |
| These 2 | $\mathbf{P\left(\frac{1}{x}\right) = -P(x)}$ | $\mathbf{M(-x) = \frac{1}{M(x)}}$ |
| These 3 | $\mathbf{P(1) = 0}$ | $\mathbf{M(0) = 1}$ |
| These 4 | $\mathbf{P(x^n) = n \cdot P(x)}$ | $\mathbf{M(n \cdot x) = (M(x))^n}$ |

Die oben im Rahmen von These 1 bis These 4 notierten Eigenschaften lassen sich durch die so genannten *Logarithmusfunktionen zur Basis a* bzw. durch die so genannten *Exponentialfunktionen zur Basis a* realisieren[4]. Während die Exponentialfunktionen den Übergang vom Plus- zum Mal-Planeten verkörpern, finden wir in den Logarithmusfunktionen das Werkzeug für den Wechsel vom Mal- zum Plus-Planeten. In standardisierter Schreibweise haben wir schließlich nachstehende Übersicht, die darüber hinaus auch die Graphen aufzeichnet.

---

Die skizzierten gruppentheoretischen Zusammenhänge lassen sich bekanntermaßen beträchtlich vertiefen und weitertragen. Verwiesen sei an dieser Stelle insbesondere auf die Aufsätze *Die endliche geometrische Reihe*, *Die unendliche geometrische Reihe* und *Ein kleiner Schritt für eine Matrix*, die allesamt momentan ebenfalls auf www.mathetreff.nrw.de zur freien Verfügung stehen und in denen jeweils bestimmte Aspekte von Linearität zum Tragen kommen.

Während dies beim Matrizenkalkül offensichtlich ist, hilft bei arithmetischen und geometrischen Reihen folgende Überlegung weiter. Das Pendant zu Exponentialfunktionen der Form $\mathbf{f}(x) := c \cdot a^{x}$ – die man auf dem Mal-Planeten verorten wird – kann man natürlich in linearen Funktionen der Gestalt $\mathbf{g}(x) := mx + b$ auf dem Plus-Planeten wiederfinden.

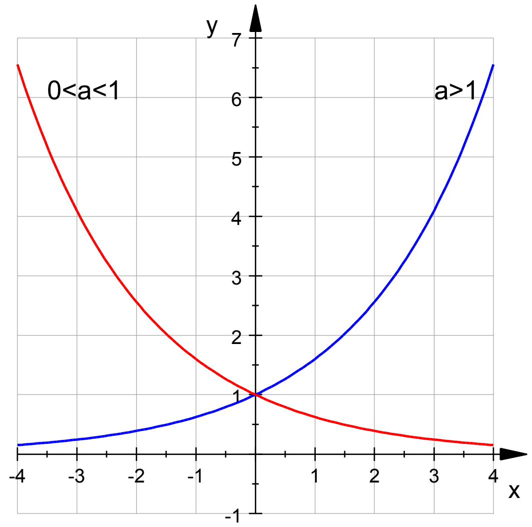
$$\log(c \cdot a^x) = \log(c) + \log(a^x) = b + x \cdot \log(a) = b + x \cdot m$$

Demnach mutiert also der Wachstumsfaktor ***a*** durch den Planetenwechsel zur Wachstumsrate ***m***, während sich die Potenz $a^x$ als Produkt ***mx*** manifestiert. Aus dem Anfangswert f(0)=***c*** wird der Anfangswert g(0)=***b***.

Dieser „Brückenschlag“ liefert eine Möglichkeit, den Themenkreis, den die zahlreichen Module zum Thema „Vertiefungsfach Mathematik“ umschreiben und der über „Lineare Gleichungssysteme“ und „Lineare Funktionen“ bis hin zu den „Trigonometrischen und Exponentialfunktionen“ reicht, fast „beiläufig“ zu schließen.

4 Dabei ist a eine beliebige, positive, reelle Zahl, die jeweils fest vorgegeben wird.

# Exponentialfunktionen



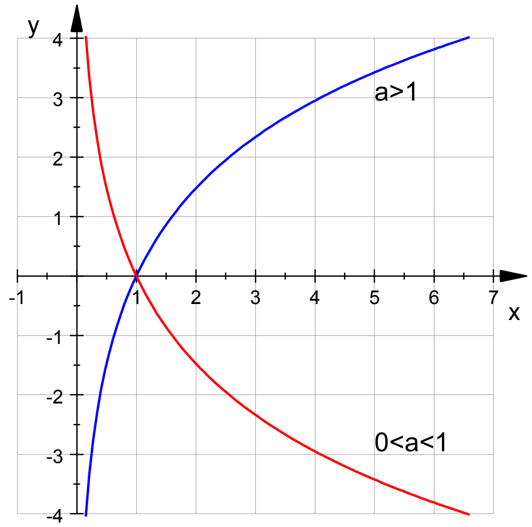

$$\exp_a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^{>0}$$
$$\mathbf{x} \longmapsto \exp_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})$$

$$\exp_a(x) = a^x$$

Dabei ist die Basis $a \in \mathbb{R}^{>0}$ beliebig, aber dann fest gewählt.

Bei den Exponentialfunktionen ist der **Exponent variabel** (und die Basis fest gewählt).

# Logarithmusfunktionen




$$\log_a : \mathbb{R}^{>0} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\mathbf{x} \longmapsto \log_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})$$

$$\log_a(x) = \frac{\log(x)}{\log(a)} = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

mit $\log := \log_{10}$ bzw. $\ln := \log_e$

Dabei ist die Basis $a \in \mathbb{R}^{>0} \setminus \{1\}$ beliebig, aber dann fest gewählt.

Die Umkehrfunktion einer Exponentialfunktion ist eine Logarithmusfunktion und umgekehrt:
Das heißt: $(\exp_a)^{\text{invers}} = \log_a$ bzw. $(\log_a)^{\text{invers}} = \exp_a$

| | vom Mal- zum **Plus**-Planeten | vom Plus- zum **Mal**-Planeten |
|---|---|---|
| Formel 1 | $\mathbf{\log_a(x_1 \cdot x_2) = \log_a(x_1) + \log_a(x_2)}$ | $\mathbf{\exp_a(x_1 + x_2) = \exp_a(x_1) \cdot \exp_a(x_2)}$ |
| Formel 2 | $\mathbf{\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a(x)}$ | $\mathbf{\exp_a(-x) = \frac{1}{\exp_a(x)}}$ |
| Formel 3 | $\mathbf{\log_a(1) = 0}$ | $\mathbf{\exp_a(0) = 1}$ |
| Formel 4 | $\mathbf{\log_a(x^n) = n \cdot \log_a(x)}$ | $\mathbf{\exp_a(n \cdot x) = (\exp_a(x))^n}$ |