Mehr Mathematik

Die Exponentialreihe

Reihen sind in der Mathematik wesentlich, und wir haben uns in dieser unserer Artikel-Reihe Mehr Mathematik *schon mit der geometrischen und der harmonischen Reihe beschäftigt. Es fehlt mindestens noch eine der berühmtesten Reihen, die Exponentialreihe.*

Wer die Sekundarstufe II besucht oder besucht hat, kennt die Exponentialfunktion

$$\text{f mit } f(x) = e^x,\ x \in \mathbb{R}\ .$$

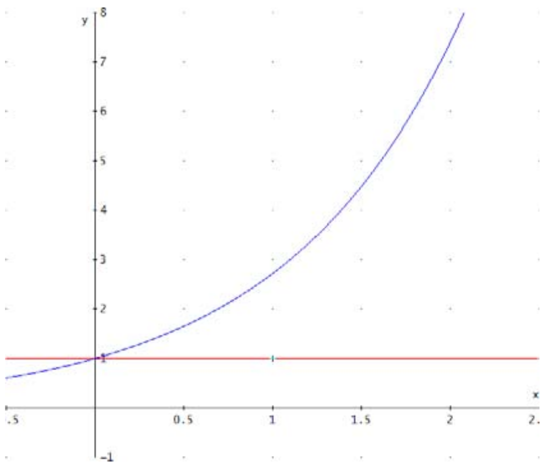
Man kann sie auch als Reihe darstellen und erhält dann

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots,\ x \in \mathbb{R}$$

oder auch

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},\ x \in \mathbb{R}\ .$$

Die Reihendarstellung gilt also für alle reellen Zahlen. Mit dieser Reihendarstellung ergibt sich eine weitere reichhaltige Sicht auf die Exponentialfunktion. Dazu an dieser Stelle nur ein Beispiel: Setzt man x=1, so kann man die Zahl e im Prinzip beliebig genau berechnen.

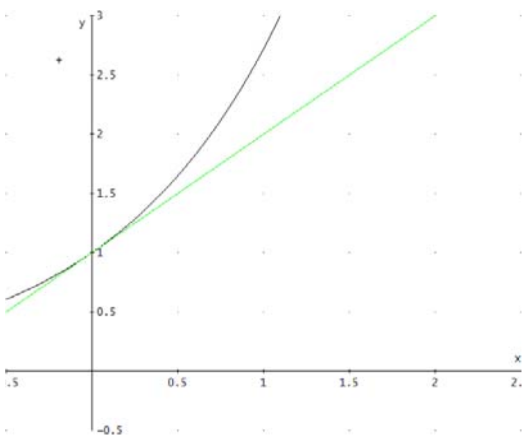


Wie kann man diese Reihendarstellung bekommen? Es gibt mehrere unterschiedliche Herleitungen der Exponentialreihe, und wir wählen eine der bescheidensten, indem wir uns für x auf den Bereich $0 < x < 2$ beschränken. Wir erhalten dann auch nur ein bescheidenes Ergebnis, Sie werden sehen. Brauchen wir spezielle Voraussetzungen? Ja – etwas Integralrechnung, aber nur die Integralformel und etwas Anschauung.

Also, für $0 < x < 2$ gilt sicher auch $e^0 = 1 < e^x$.

Dann folgt

$$\int_0^x e^t dt > \int_0^x t\, dt\ .$$



Das Ungleichheitszeichen macht man sich an dem Bild klar. Man rechnet nun beide Seiten mit der Integralformel aus und erhält

$$e^x - 1 > x \text{ bzw.}$$

$$e^x > 1 + x\ .$$

Auch diese neue Ungleichung integrieren wir wieder auf beiden Seiten, also

$$\int_0^x e^t dt > \int_0^x (1+t)dt$$, siehe Bild, und erhalten

$$e^x - 1 > x + \frac{1}{2}x^2 \text{, somit}$$

$$e^x > 1 + x + \frac{1}{2}x^2 \text{, und völlig analog geht es weiter}$$

$$e^x > 1 + x + \frac{1}{1\cdot 2}x^2 + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 \text{ und nach n Schritten}$$

$$e^x > 1 + x + \frac{1}{1\cdot 2}x^2 + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n \text{ .}$$

Wir haben auf diese Weise – wie man sagt - e^x nach unten abgeschätzt. Nun schätzen wir mit ähnlichen Tricks nach oben ab.

Da e^x monoton wächst, folgt aus $0 < x < 2$ zum einen $1 < e^x < e^2$. Da aber zudem $e < 3$ ist, gilt auch $e^2 < 3^2$, damit haben wir also insgesamt $1 < e^x < 3^2$.
Und dann folgt wieder per Integral

$$\int_0^x e^t\, dt < \int_0^x 3^2\, dt \text{, somit } e^x - 1 < 3^2 \cdot x \text{, bzw.}$$

$$e^x < 1 + 3^2 \cdot x \text{.}$$

Und wieder analog

$$e^x < 1 + x + 3^2 \cdot \frac{1}{2}x^2 \text{, schließlich nach n+1 Schritten}$$

$$e^x < 1 + \frac{x}{1!} + \frac{1}{2}x^2 + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + 3^2\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \text{.}$$

Insgesamt haben wir also

$$(*) \quad 1 + \frac{x}{1!} + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n < e^x < 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + 3^2\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \text{.}$$

Wer Mathematik mag, müsste eigentlich auch seine Freude an dieser Formel haben. Wir schauen uns nun den letzten Summanden

$$3^2\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

genauer an. Da $x < 2$ ist, gilt

$$3^2\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} < 3^2\frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \text{.}$$

Oben und unten stehen auf beiden Seiten gleich viele Faktoren, auf der rechten Seite oben immer die 2, unten aber Faktoren, die unbegrenzt wachsen, d. h. es gilt offensichtlich

$$\lim_{n\to\infty} 3^2\frac{2^{n+1}}{(n+1)!} = 0 \text{.}$$

Und damit erhalten wir aus (*) - leider nur für $0 < x < 2$ - nach dem Sandwich-Grenzwertsatz („Wenn man das Brötchen platt drückt, wird es auch für den Käse eng.“) die berühmte Reihendarstellung der Exponentialfunktion.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{1}{2}x^2 + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

Argumentiert man etwas komplizierter und investiert auch noch partielle Integration, so kann man zeigen, das die Darstellung für alle $x \in IR$ gilt.

Demnächst geht es an dieser Stelle weiter.

(nev)