

Mehr Mathematik

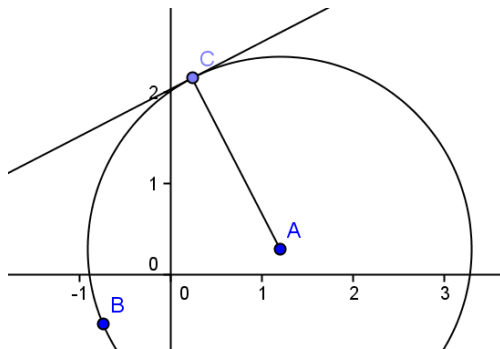
Grundideen der Analysis mit Geogebra

Teil 1: Das Tangentenproblem

Mache die Dinge so einfach wie möglich - aber nicht einfacher.
Albert Einstein

Immer mit den einfachsten Beispielen anfangen.
David Hilbert

Vermutlich ist das Tangentenproblem, also das Problem, an den Graphen einer Funktion in einem Punkt eine Tangente anzulegen, zum einen eines der fruchtbarsten Probleme der Mathematik, aber leider auch eine der schwierigsten Aufgaben der Schulmathematik. Mit Geogebra lässt es sich



sehr komfortabel behandeln. Das Geheimnis liegt in der dynamischen Visualisierung. Man darf so die Hoffnung haben, im Unterricht mehr Verstehen zu erreichen. Zudem ist Geogebra in einem Top-Zustand und kann kostenlos herunter geladen werden, ist also auch für Schülerinnen und Schüler schnell verfügbar.

Blickt man in die gängigen Lehrbücher, so findet man das Tangentenproblem heutzutage üblicherweise zunächst in einer Anwendungssituation. Man kann sicher darüber streiten, ob eine Häufung von

Schwierigkeiten an dieser Stelle im Unterricht klug ist. Manches spricht dafür, zunächst nur den Geometrieaspekt in den Blick zu nehmen: Er ist für sich sicher interessant genug. Also: Wir starten mit dem einfachsten Fall, der nicht zu einfach ist.

Es geht dabei um die Aufgabe, in einem Punkt des Graphen der Funktion

$$f \text{ mit } f(x) = x^2,$$

etwa im Punkt (1;1), eine Tangente anzulegen.

1. Schritt:

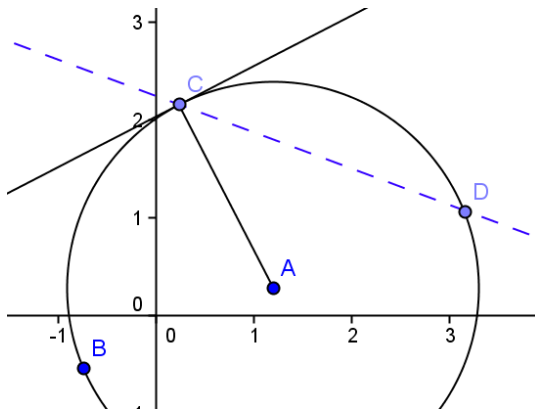
Was ist eine eigentlich eine Tangente? Man kennt Tangenten aus der Geometrie als berührende Geraden am Kreis, die über den sogenannten Berührradius konstruiert werden. Die obige Graphik ist in diesem Sinne mit Geogebra konstruiert worden: Wir zeichnen einen Kreis, tragen einen Punkt C auf dem Kreisbogen ein, verbinden ihn mit dem Mittelpunkt A und zeichnen die Tangente durch C rechtwinklig zu AC. Man sagt, sie *berührt* den Kreisbogen in dem Sinne, dass sie ihn nicht schneidet.

Da Parabeln keinen Mittelpunkt haben, lässt sich diese Idee nicht auf Parabeln übertragen, wohl aber die anschaulich-geometrische Vorstellung des *Berührens*.

Wir können die offensichtlich am Kreis existierende Tangente aber ohne Radius auch durch einen Näherungsprozess finden: Wir wählen auf dem Kreis einen weiteren Punkt D und zeichnen die Sekante durch C und D ein. Schieben wir nun in Geogebra den Punkt D auf C zu, so geht die



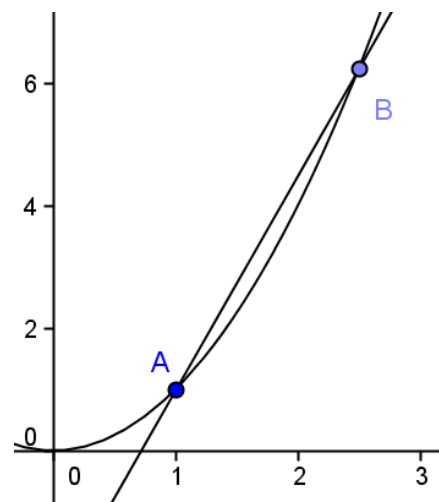
Sekante in die Tangente über. Man hat es mit einem *Näherungsprozess* zu tun, der jedoch nicht ganz unproblematisch ist: Wenn D auf C liegt, handelt es sich nicht mehr um eine Sekante, die Konstruktion bricht zusammen, wie sich in Geogebra auch zeigt, wenn wir die zuvor gezeichnete Tangente verstecken: Versuchen Sie in Geogebra, eine Sekante durch zwei Punkte zu zeigen, die gleich sind: Es geht nicht.



Also: Wir übertragen den Annäherungsprozess vom Kreis auf die Parabel und müssen dann aus diesem Prozess auf die Tangente schließen. Das Problem wandert aus der Geometrie der Bewegung in die rechnende Mathematik.

2. Schritt: Wir zeichnen die Normalparabel mit dem Punkt $P=(1,1)$, wählen einen anderen Punkt Q auf der Parabel, konstruieren die Sekante durch PQ

und stellen sie in der Form $y=m \cdot x + b$ dar, indem wir falls erforderlich - rechts auf die Gleichung Tangentengleichung in der Form $a \cdot x + b \cdot y = d$ klicken. Indem wir Q bewegen, sehen wir, wie sich Steigung der Sekante verändert. Man kann vermuten, dass die Tangente, der sich der Prozess annähert, die Steigung $m=2$ hat. Geogebra erlaubt den zahlenmäßigen Näherungsprozess zu beobachten, ein großer Schritt für den Lernprozess. Bewegung im Bild wird zu einer Zahlenfolge von Steigungen. Schöner kann man es sich kaum wünschen.



die
es,
Die

Dann geht es wie üblich algebraisch weiter:

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{(1+h)^2 - 1}{h} = \dots$$

$$= 2 + h \rightarrow 2 \text{ für } h \rightarrow 0$$

Es ist nun in der Tat naheliegend, $m=2$ als Steigung der Tangente zu setzen, und damit hat man gewonnen.

Demnächst hier dann mehr.

(nev)