Mehr Mathematik

Die harmonische Reihe und die Divergenz

Unter der harmonischen Reihe versteht man die Reihe

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots$$

oder mit dem Summenzeichen geschrieben

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\ .$$

Während wir nun wissen, dass die geometrische Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty}q^n$$

für $|q|<1$ konvergiert, also einen Grenzwert hat, siehe Mathetreff, stellt sich die Frage, ob die harmonische Reihe auch einen Grenzwert hat. Die „Summe" dieser Reihe wird immer größer, aber es kommt immer weniger hinzu, d. h. sie wächst mit „schneckenhafter Langsamkeit", (Zitat Harro Heuser). Das legt den Verdacht der Konvergenz nahe.

Es ist aber nicht so, die harmonische Reihe wird irgendwann einmal größer als 1000, irgendwann größer als 2000 ... , kurz: Sie wächst über jede Schranke. Für die Feinheiten der Konvergenz ist unser Gefühl nicht zuverlässig. Um dieses unbeschränkte Wachstum einzusehen, schätzen wir die Reihe nach unten auf folgende Weise ab:

$$1+\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}_{>\frac{2}{4}=\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}}_{>\frac{4}{8}=\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{16}}_{>\frac{8}{16}=\frac{1}{2}}+\ldots$$

Die Reihe wird also auf geschickte Weise abschnittsweise mit 1/2 nach unten abgeschätzt, und man erkennt, dass sie immer langsamer werdend unbegrenzt wächst, weil sie von Etappe zu Etappe jeweils um mehr als 1/2 wächst. Die Etappen werden allerdings immer länger. Sie ist also divergent. Ein faszinierender Gedanke.

Und dieser Beweis ist altehrwürdig: Er findet sich schon bei Nicole Oresme (1323? -1382), Mathematiker, Theologe, und gegen Ende seines Lebens Bischoff von Lisieux in der Normandie.

Natürlich stellt sich auch folgende Frage: Was ist eigentlich an der harmonischen Reihe harmonisch? Um das zu verstehen, füge ich ein längeres Zitat aus dem wunderschönen Buch

Die Musik der Primzahlen
Marcus du Sautoy, Mathematikprofessor aus Oxford
München, 2004,S.102f.

an, das auch im Mathetreff besprochen wurde. „Bläst man flach über die Öffnung eine Flasche, so hört man einen Ton. Mit etwas Übung und etwas mehr Puste hört man auch höhere Töne – die Obertöne. Ganz entsprechend erzeugt ein Musiker, der auf einem Instrument einen Ton spielt, gleichzeitig eine Unzahl von Obertönen. Diese Obertöne verleihen dem Instrument seinen charakteristischen Klang. Physikalisch ausgedrückt bedeutet der charakteristische Klang eines Instruments, dass wir verschiedene Kombinationen aus Obertönen wahrnehmen. Eine Klarinette beispielsweise erzeugt neben dem Grundton nur die Obertöne in ungeraden Verhältnissen: 1/3 ,1/5,1/7,.... Demgegenüber erzeugt die schwingende Saite einer Geige alle Obertöne, die ... den Verhältnissen 1/, 1/3, 1/4, ... entsprechen.
Der Klang einer schwingenden Geigensaite entspricht also der unendlichen Überlagerung aus dem Grundton sowie aller möglichen Obertöne. Diese Erkenntnis erweckte bei den Mathematikern die Neugierde, das mathematische Gegenstück zu untersuchen, die so genannte harmonische Reihe“.

(nev)