

# Mehr Mathematik

## Die harmonische Reihe und die Primzahlen

*Sie haben im Mathetreff den Beitrag über die geometrische Reihe und über die harmonische Reihe gelesen oder sie wussten diese Dinge schon vorher. Dann sind Sie genau der oder die Richtige, einen der faszinierendsten Gedanken der Mathematik kennen zu lernen.*

*Mathematik übrigens stammt ab von dem griechischen Verb manthánein und bedeutet soviel wie ein gründlicheres und intensiveres Lernen.*

*Also los.*



Wir haben in unserem Mathetreff unter *Mehr Mathematik* mit dem euklidischen Beweis gesehen, dass es unendlich viele Primzahlen gibt. Dieser Beweis ist kurz, elegant und zu recht berühmt. Nun lernen wir einen anderen Beweis zum gleichen Thema kennen; auch er zeigt, dass es unendlich viele Primzahlen gibt. Aber er funktioniert ganz anders und basiert auf einer beeindruckenden Idee von Leonhard Euler (1707-1783).

Zunächst eine kleine Vorbereitung: Die Grenzwertformel für die geometrische Reihe lautet bekanntlich für  $|q| < 1$

$$(1) \quad 1 + q + q^2 + q^3 + \dots = \frac{1}{1 - q}$$

Wir setzen nun für  $q$  den reziproken Wert einer Primzahl  $p$  ein, also  $q = \frac{1}{p}$ , und erhalten

$$(2) \quad 1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{p}}$$

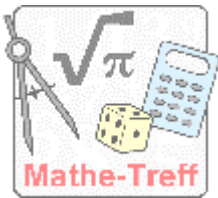
Das ist sicher richtig, denn unser neues  $q$  liegt zwischen 0 und 1.

Nun also zum Eulerschen Primzahlbeweis. Wir nehmen wieder an, es gibt nur endlich viele Primzahlen

$$p_1, p_2, \dots, p_n,$$

wenn auch sehr viele. Für jede dieser Primzahlen können wir die Formel (2) aufstellen und erhalten

$$(3) \quad 1 + \frac{1}{p_i} + \frac{1}{p_i^2} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{p_i}}$$



Weiter: Von den Formeln der Sorte (3) gibt es endlich viele und diese multiplizieren wir alle miteinander, alle rechten Seiten und alle linken Seiten. Es entsteht eine Gleichung von einer gewissen Komplexität und Schönheit. Ein riesiges Produkt, aber doch nur endlich viele Faktoren

$$(4) \left(1 + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_1^2} + \frac{1}{p_1^3} + \dots\right) \left(1 + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_2^2} + \frac{1}{p_2^3} + \dots\right) \dots \left(1 + \frac{1}{p_n} + \frac{1}{p_n^2} + \frac{1}{p_n^3} + \dots\right) =$$

$$\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{p_1}}\right) \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{p_2}}\right) \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{p_3}}\right) \dots \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{p_n}}\right)$$

Auf der rechten Seite bzw. in der zweiten Zeile steht eine endliche Zahl. Was steht auf der linken Seite? Und hier kommt nun die angekündigte wunderbare Eulersche Idee:

Wir appellieren dazu an Ihre Vorstellungskraft: Multiplizieren Sie die linke Seite von (4) aus, oder besser, *stellen Sie sich vor*, Sie würden auf der linken Seite von (4) alle Klammern miteinander ausmultiplizieren. Jeder Summand jeder Klammer wird mit jedem Summanden jeder anderen Klammer multipliziert. Dann erhalten Sie alle endlichen Primzahlpotenz-Produkte, die möglich sind. Das sind aber alle natürlichen Zahlen in den Nennern, denn jede natürliche Zahl besteht ja gerade aus Primzahlprodukten. Nur muss man die Frage stellen, ob es nicht passieren kann, dass es natürliche Zahlen gibt, die auf diese Weise mehrfach auftreten, das wäre natürlich sehr hinderlich. Aber die Antwort ist: nein. Jede natürliche Zahl lässt sich genau auf eine Weise als Primzahlprodukt schreiben. Damit befassen wir uns demnächst hier im MatheTreff unter *Mehr Mathematik*.

Also gilt in der Tat

$$(5) \left(1 + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_1^2} + \frac{1}{p_1^3} + \dots\right) \left(1 + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_2^2} + \frac{1}{p_2^3} + \dots\right) \dots \left(1 + \frac{1}{p_n} + \frac{1}{p_n^2} + \frac{1}{p_n^3} + \dots\right) =$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots,$$

man erhält demnach die harmonische Reihe.

Etwas langsamer gedacht: Kommt denn auch der Summand  $\frac{1}{8}$  vor? Ja, man wähle in (5) in der ersten

Klammer  $\frac{1}{p_1^3}$  und in allen anderen Klammern die 1. Könnte  $\frac{1}{8}$  mehrfach vorkommen? Nein, denn 8 lässt

sich *nur* als  $2^3$  schreiben.

Die harmonische Reihe ist aber divergent. In (4) steht so auf der linken Seite keine endliche Zahl, auf der rechten Seite nach Voraussetzung aber doch. Das ist ein Widerspruch. Es gibt demnach nicht nur endlich viele Primzahlen.

Gut, das wussten wir vorher, aber wir gewinnen diese Einsicht auf einen völlig anderen Weg. Die harmonische Reihe, die ja bekanntlich mit der Obertonreihe in der Musik verwandt ist, ist auch mit den Primzahlen verwandt. Oder - die Primzahlen haben verwandtschaftliche Beziehungen mit dem Wesen der Musik, was immer das auch ist. Natürlich stellt sich auch die Frage: Braucht man eigentlich noch weitere Beweise für einen Sachverhalt, den man schon als richtig erkannt hat? Nein, eigentlich nicht. Aber weitere Beweise bringen weitere Einsichten, darin liegt ihr Reiz: Mathematik fasziniert.

(nev)