Mathe-Treff Mehr Mathematik:

Die unendliche geometrische Reihe

Im ersten Teil über die geometrische Reihe haben wir uns mit der endlichen geometrischen Reihe befasst und die folgende Summenformel entwickelt:

$$(1) \quad 1+q+q^2+q^3+\ldots+q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Richtig betrachtet, sieht man dieser Formel schon den Reihenwert für unendlich viele Summanden an: Wir setzen zuerst wieder

$$q=\frac{1}{2}$$

und sehen, dass für immer größer werdende n aus den natürlichen Zahlen der Ausdruck $\left(\frac{1}{2}\right)^n$

immer stärker gegen Null strebt. Man sagt, er hat den Grenzwert 0.

D. h. aber, dass der Term $\dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)}$

sich immer mehr $\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$

annähert - im Zähler wird von 1 immer weniger abgezogen. Verallgemeinert tritt der Effekt natürlich nur für $-1<q<+1$ auf. Im allgemeinen Fall ergibt sich also für q zwischen -1 und 1 der Grenzwert

$$(2) \quad 1+q+q^2+q^3+\ldots=\frac{1}{1-q}$$

Man schreibt auch

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-q^{n+1}}{1-q}=\frac{1}{1-q}, \quad -1<q<1$$

und sagt „Limes (= Grenzwert) n gegen unendlich von 1-q hoch n durch 1-q ist gleich 1 durch 1-q“.

Mit den Formeln zur geometrischen Reihe lässt sich sehr viel anfangen. Dazu demnächst mehr.

(nev)