



Aufgabe 1

Fensterbilder

Sei bei C der rechte Winkel des Dreiecks ABC:

Sei F der Flächeninhalt von $\triangle ABC$. Dann gilt $F = \frac{|BC| \cdot |AC|}{2}$, da $\triangle ABC$ rechtwinklig ist.

Weiterhin sei S die Summe der Flächeninhalte der Sichel über \overline{AC} und \overline{BC} und sei die Summe der Flächeninhalte ihrer Kreisbögen K. Sei R der Flächeninhalt des Halbkreises über \overline{AB} .

Somit gilt $S = K - R + F$. Eingesetzt ergibt sich:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\pi \left(\frac{|AC|}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\pi \left(\frac{|BC|}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\pi \cdot \left(\frac{|AB|}{2}\right)^2 + \frac{|BC| \cdot |AC|}{2} \\ &= \frac{1}{2}\pi \left(\left(\frac{|AC|}{2}\right)^2 + \left(\frac{|BC|}{2}\right)^2 - \left(\frac{|AB|}{2}\right)^2 \right) + \frac{|BC| \cdot |AC|}{2} \\ &= \frac{1}{2}\pi \left(\frac{|AC|^2 + |BC|^2 - |AB|^2}{4} \right) + \frac{|BC| \cdot |AC|}{2} \end{aligned}$$

Nach Satz des Pythagoras gilt $|AC|^2 + |BC|^2 - |AB|^2 = 0$.

Daraus folgt: $S = \frac{1}{2}\pi \cdot \frac{0}{4} + \frac{|BC| \cdot |AC|}{2} = \frac{|BC| \cdot |AC|}{2} = F$.

Also hat Marc Recht.

Aufgabe 2

Skipiste

Britta überholt ihre Freundinnen nach einer Stunde.

Es lässt sich die folgende Gleichung aufstellen, wobei x die Dauer in Stunden ist, die Britta nach dem Überholen von Anna und Celine noch bis zur Talstation fährt:

$$\begin{aligned} 15x &= 10x + 10 \cdot \frac{1}{4}h \\ \Leftrightarrow 5x &= 10 \cdot \frac{1}{4}h \\ \Leftrightarrow x &= 2 \cdot \frac{1}{11}h \\ \Leftrightarrow x &= \frac{1}{2}h \end{aligned}$$

Britta fährt insgesamt also 1,5 Stunden und die Strecke ist somit 22,5 Kilometer lang.

Aufgabe 3

Leckeres in Rucksäcken

Wir beweisen durch Widerspruchsbeweis. Zunächst bilden wir jeweils das logische Gegenteil zu (1),(2) bzw. (3) und nennen es (4),(5) bzw. (6).

(4) Willi hat die Dominosteine nicht.

(5) Karli hat die Dominosteine.

(6) Moli hat die Lebkuchen.

Wir nehmen nacheinander an, dass eine Aussage korrekt ist und überprüfen, ob sich daraus ein Widerspruch ergibt.

Fall 1: Aussage (1) ist korrekt. Somit müssen auch (5) sowie (6) gelten. (1) und (5) widersprechen sich jedoch, da nur ein Wichtel die Dominosteine haben kann.

Fall 2: Aussage (2) ist korrekt. Somit müssen auch (4) sowie (6) richtig sein. Da aber weder Willi noch Karli die Dominosteine haben kann, und Moli schon die Lebkuchen hat, ergibt sich auch hier ein Widerspruch.

Fall 3: Aussage (3) ist korrekt. Somit müssen auch (4) sowie (5) stimmen. Hieraus ergibt sich, dass Willi die Dominosteine, Karli die Printen und Moli die Lebkuchen im Rucksack hat.