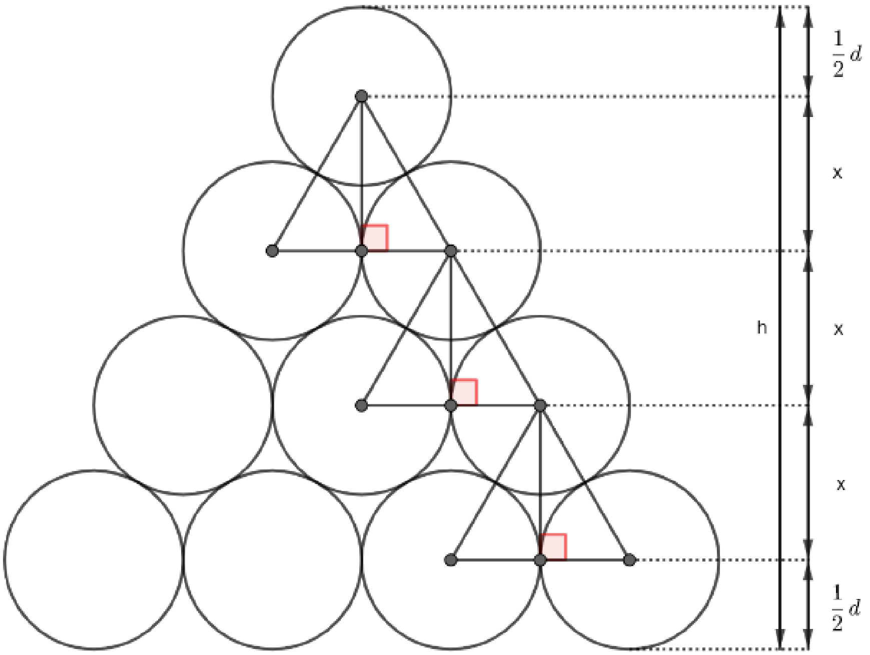
Mathetreff: Lösungen der Knobelaufgaben für die Oberstufe

Oktober bis Dezember 2024

Aufgabe 1

Goldtaler



© Gerhild Kleinhans, Mathematik-Treff

Die Anordnung der Goldmünzen hat eine Breite von $4d = 4 \cdot 4{,}5cm = 18cm$. Die „Höhe h" der Anordnung unterteilen wir in 5 Abschnitte wie in der Abbildung zu sehen. Die Höhe der Abschnitte vom Rand bis zum Mittelpunkt des vom Rand aus ersten Talers ist jeweils $\frac{1}{2}d$. Um die anderen Abschnitte zu berechnen konstruieren wir jeweils ein Dreieck mit den Mittelpunkten von drei einander berührenden Kreisen als Eckpunkte. Die Höhe dieser drei Dreiecke sei jeweils x. Wir können die Länge von x nun mit dem Satz des Pythagoras berechnen, da die Höhe auf einer Tangente der unteren Kreise liegt. Somit ist $h^2 = d^2 - \left(\frac{1}{2}d\right)^2 \Rightarrow h = \sqrt{d^2 - \frac{1}{4}d^2} = \sqrt{\frac{3d^2}{4}} = \frac{\sqrt{3d^2}}{2}$.

Die gesamte Höhe h ist nun $h = 3 - x + 2 \cdot \frac{1}{2}d = 3 \cdot \frac{\sqrt{3d^2}}{2} + d = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{3 \cdot (4{,}5cm)^2} + 4{,}5cm = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{60{,}75}cm + 4{,}5cm \leq 7{,}8\text{cm} \cdot \frac{3}{2} + 4{,}5\text{cm} = 11{,}7\text{cm} + 4{,}5cm = 16{,}2cm$. Da die gesamte Höhe echt kleiner als 16,2cm ist, passen die Goldmünzen in die Box und Karla hat Recht.

Aufgabe 2

Schlittenhunde

Erik hat zu dem Zeitpunkt, an dem Jan losfährt, bereits einen Vorsprung von $15\frac{km}{h} \cdot \frac{1}{2}h + 5km = 7{,}5km + 5km = 12{,}5km$.

Jan holt auf Erik mit einer Geschwindigkeit von $25\frac{km}{h} - 15\frac{km}{h} = 10\frac{km}{h}$ auf.

Er überholt Erik also $12{,}5km : 10\frac{km}{h} = 1{,}25h$ nachdem er losfährt. Danach fährt er einen Vorsprung von $48min = \frac{5}{6}h$ heraus.

Sei x die Zeit in Stunden, die Jan fährt, nachdem er Erik überholt hat, so gilt:

$25x = 15x + \frac{4}{5} \cdot 15 \langle = \rangle 10x = 12 \langle = \rangle x = \frac{6}{5}$.

Die gesamte Strecke ist also $12{,}5km + \frac{6}{5} \cdot 25\frac{km}{h} = 42{,}5km$ lang.

Aufgabe 3

Wer hat Recht?

Die Summe von 100 aufeinanderfolgen ganzen Zahlen lässt sich teilen in die Summe von 50 geraden aufeinanderfolgen ganzen Zahlen und die Summe von 50 ungeraden aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen. Die Summe aus geraden Zahlen ist immer gerade, und die Summe einer geraden Anzahl an ungeraden Zahlen ist ebenfalls gerade. Daher ist auch die Summe dieser beiden Teilsummen, die Summe 100 aufeinanderfolgender Zahlen, immer gerade.