



Aufgabe 1

Die Ziegen zweier Schwestern

Wenn es n Ziegen gibt und jede Ziege n Euro kostet, ist der Gesamtbetrag n^2 Euro.

Jede Zahl n kann man in der Form $a \cdot 10 + b$ schreiben; beispielsweise die Zahl 4356 als $435 \cdot 10 + 6$.

n^2 ist also $(a \cdot 10 + b) \cdot (a \cdot 10 + b) = 100 \cdot a^2 + 20 \cdot ab + b^2$.

Die ersten beiden Terme ($100 \cdot a^2 + 20 \cdot ab$) ergeben immer eine Zahl mit einer geraden Zehnerstelle. Dieser Anteil lässt sich immer zwischen den beiden Erben glatt aufteilen. Nur der Anteil der Einerstelle $b \cdot b$ kann also dazu führen, dass die beiden Schwestern nicht gleich viele 10-Euro-Scheine erhalten.

b^2 sind die ersten 10 Quadratzahlen: 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, und 81. Davon haben nur 16 und 36 eine ungerade Zehnerstelle; bei allen anderen Zahlen hätte beide Schwestern gleich viele 10-Taler-Scheine bekommen.

Egal, ob nun 16 oder 36 - die Einerstelle ist immer 6; die jüngere Schwester hat also 6 Euro in Münzen erhalten; die ältere Schwester muss der jüngeren Schwester daher noch 2 Euro geben.

Aufgabe 2

Eine Reihe von Quadratzahlen

Man muss 15 mal eine Quadratzahl zwischen 4 und 25 bilden. Zuerst einmal nimmt man an, dass man jede der Zahlen 1 bis 16 zweimal zur Verfügung hat:

4: 1x (1;x) (2;2) (3;x) (4;4) (5;5) (6;6) (7;7) (8;8) (9;9) (10;10) (11;11) (12;12) (13;13) (14;14) (15;15) (16;16)

9: 4x (x;x) (2;x) (x;x) (4;x) (5;x) (6;x) (7;x) (8;x) (9;9) (10;10) (11;11) (12;12) (13;13) (14;14) (15;15) (16;16)

16: 5x (x;x) (x;x) (x;x) (x;x) (x;x) (x;x) (x;x) (x;x) (8;x) (9;x) (10;x) (11;x) (12;x) (13;13) (14;x) (15;15) (16;16)

25: 4x (x;x) (x;x) (x;x) (x;x) (x;x) (x;x) (x;x) (8;x) (x;x) (x;x) (x;x) (x;x) (x;13) (x;x) (15;x) (16;x)

So kann man aber nur $1+4+5+4=14$ Quadratzahlen bilden! Beginnt man aber mit der 25, kann man 4×9 , 7×16 und 4×25 bilden, wobei die 4 (als Summe) nicht verwendet wird. Die 16 und die 8 bleiben je einmal übrig, müssen also am Anfang bzw. am Ende stehen. Damit sind auch die zweite und die vorletzte Zahl festgelegt ($25=16+9$ und $9=8+1$; also 9 und 1).

Der Rest ist nicht mehr schwer: 16, 9, 7, 2, 14, 11, 5, 4, 12, 13, 3, 6, 10, 15, 1, 8

Aufgabe 3

Das Frühlingsfest

Sei

x = Anzahl der Personen

y = Anzahl der Kutschen zu Beginn

Auf halbem Wege fallen zehn Kutschen aus, sodass jeder der übrigen eine weitere Person aufnehmen muss.

$$x/(y-10) = x/y + 1 \Rightarrow x = y(y-10)/10$$

Vor Antritt des Rückweges fallen weitere 15 Kutschen aus, was zur Folge hat, dass in jeder Kutsche drei Personen mehr sind als bei der Abfahrt am Morgen.

$$x/[y-(15+10)] = x/y + 3 \Rightarrow x = 3y(y-25)/25$$

Gleichsetzen:

$$y(y-10)/10 = 3y(y-25)/25 \Rightarrow y = 100$$

Einsetzen:

$$\Rightarrow x = y(y-10)/10 = 100(100-10)/10 = 900$$

An dem Fest nahmen also 900 Personen teil.

.