Mathematik Wer glaubt, die Kreiszahl π sei allgegenwärtig, der soll erst mal e kennenlernen

Die *steile* Zahl

Sie ist krumm und kommt in Formeln vor, die irgendwie schwierig aussehen. Doch die Eulersche Zahl hat es in sich. Wo sie drinsteckt, da ist wirklich was los.

VON ULF VON RAUCHHAUPT

Am 14. März ist „π-day". Vor einigen Jahren kam der Mitarbeiter eines Wissenschaftsmuseums in San Francisco auf die Idee, das Datum, das in Amerika 3/14 geschrieben wird, in den Dienst der Werbung für Mathematik zu stellen: denn „3,14", das ist auf zwei Nachkommastellen genau die Kreiszahl π (sprich „pi"), und so werden an diesem Tag zylindrische Backwaren verspeist, um der Tatsache zu gedenken, dass alles Kreisrunde, egal ob Wasserstoffatom, Planet oder eben Apfelkuchen, dasselbe Verhältnis von Umfang zu Durchmesser hat, eben π. Außerdem hat am 14.3. Albert Einstein Geburtstag.

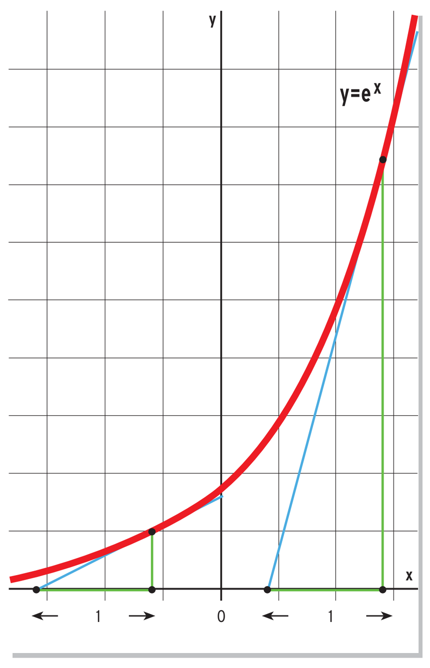
Doch wenn der 14. März ein mathematischer Gedenktag ist, dann hat das heutige Datum erst recht einen verdient, und heute abend um Punkt 18 Uhr 28 und 18 Sekunden sollten die Sektkorken knallen: zu Ehren von 2,7182818... genannt e, die Eulersche Zahl.

Zugegeben, e hat es auf den ersten Blick etwas schwerer. So ein Kreis, an dem sich π zeigt, hat als geometrisches Gebilde per se etwas Anschauliches, wenn auch ein wenig Statisches. Die Zahl e hingegen kommt aus etwas abstrakteren Zusammenhängen, dafür meist sehr dynamischen: e steckt überall drin, wo die aktuelle Größe von etwas sich auf deren eigene Änderung auswirkt.

Zum Beispiel die Höhe eines verzinsten Kapitals. Wer Geld bei einem Finanzinstitut anlegt, der bekommt es nach einer gewissen Zeit, sagen wir nach einem Jahr, zuzüglich eines gewissen Zinsbetrages zurück. Lässt man das Geld doppelt so lange liegen, verdient man aber nicht einfach nur das Doppelte. Denn während des zweiten Jahres „arbeitet" ja nicht nur das Startguthaben, sondern bereits das nach dem ersten Jahr verzinste Kapital. Zeichnet man das Wachstum des Vermögens über mehrere Jahre als Diagramm, so ergibt sich keine gerade, wie mit dem Lineal gezogene Linie, die Geldvermehrung ist nicht linear, wie man auch sagt. Statt dessen krümmt sich die Kurve nach oben, sie ist exponentiell.

Ein Hoch dem Zinseszins

Exponentielles Wachstum heißt so, weil die wachstumserzeugende Größe – im Falle des angelegten Kapitals die Anzahl der Verzinsungen im Laufe der Zeit – in der entsprechenden mathematischen Formulierung im Exponenten steht. Ein berühmtes Beispiel für exponentielles Wachstum ist die Legende von den Reiskörnern, die immer weiter verdoppelt werden: im ersten Schritt werden aus einem Korn zwei, im zweiten aus zwei vier und so weiter, bis es im n-ten Schritt 2^n Körner sind (siehe, „Auf 64 Feldern in den Ruin"). Das entspricht einer Verzinsung von



Je höher, desto steiler: Das gilt für viele Wachstumskurven. Bei der Exponentialfunktion aber ist die zugehörige Kurve (rot) in jedem Punkt exakt so steil, wie ihr Funktionswert hoch ist. Da die Steigung ihrer Tangenten (blau) das Verhältnis der beiden grünen Strecken ist und die längere davon den Funktionswert angibt, ist die kürzere immer exakt gleich 1. Die Steigung der Tangente an einem Kurvenpunkt heißt auch die Ableitung der Funktion in diesem Punkt. Die Exponentialfunktion ist überall gleich ihrer Ableitung – und ist die einzige Funktion mit dieser kuriosen Eigenschaft.

100 Prozent von einem Schritt zum nächsten.

Der Zinssatz ist aber nicht alles. Nehmen wir an, der liege fest, sagen wir der Einfachheit halber 100 Prozent im Jahr. Dann gibt es für einen Kapitalanleger trotzdem noch eine Möglichkeit, den Ertrag des eingesetzten Kapitals zu steigern, sofern die Bank dies nicht in ihren Geschäftsbedingungen ausgeschlossen hat: Er könnte nicht das Jahr abwarten, nach dem aus seinem Euro zwei geworden sind, sondern das Geld bereits nach sechs Monaten samt der bis dahin aufgelaufenen Zinsen (50 Cent) abholen und diese 1,50 Euro zu den gleichen Konditionen neu anlegen. Ein halbes Jahr später wären daraus wieder das Anderthalbfache geworden, also 2,25 Euro, macht 25 Cent mehr, als wenn er das volle Jahr abgewartet hätte. Entsprechend würden noch kürzere Anlageintervalle noch mehr einbringen: bei viermaliger Neuanlage im Jahr wären es nach der ersten Transaktion 1 + 1/4 = 1,25 Euro, die dann wieder angelegt und verzinst würden, und am Ende des Jahres ergäben sich 1,25 mal 1,25 mal 1,25 mal 1,25 oder $(1{,}25)^4 = 2{,}44$ Euro, bei achtmaliger $(1 + 1/8)^8 = 2{,}57$ Euro.

Doch die wundersame Kapitalvermehrung hat eine Grenze: wenn man nun statt stündlich minütlich neu anlegte, bekäme man zwar etwas mehr heraus, und beim sekündlichen Anlegen noch etwas mehr – aber die Unterschiede würden immer marginaler. Mathematisch drückt sich das in der Formel $(1 + 1/n)^n$ aus, dem Betrag, den man in unserem Beispiel am Ende eines Jahre erhält, in dem n–1 mal abgehoben und neu angelegt wurde. Dieser Ausdruck wird nämlich keineswegs immer größer, je größer wir n machen, sondern strebt dabei einer ganz bestimmten Zahl zu, ihr Wert lautet 2,7182818... – es ist die Eulersche Zahl e.

Hätten wir nicht einen jährlichen Zinssatz von 100 Prozent angenommen, sondern 200 Prozent, so wären aus einem Euro bei dieser „kontinuierlichen Verzinsung" nach einem Jahr nicht e Euro herausgekommen sondern e^2 Euro. Bei 50 Prozent wären es $e^{0,5}$ gewesen, bei 10 Prozent $e^{0,1}$ – stets hätten wir es mit einem Exponentialausdruck der Basis e zu tun gehabt. Diese Zahl hat also ganz offensichtlich eng mit der Tatsache zu tun, dass Wachstum in jedem Moment proportional zur aktuellen Menge des Wachsenden ist. Genau darum kommt e in kontinuierlichen Prozessen so häufig vor.

Dabei trifft man Eulers Zahl oft in der sogenannten e-Funktion $y(x) = e^x$, auch einfach Exponentialfunktion genannt. Ihre Kurve hat die Eigenschaft, dass das y zu einem bestimmten x genau ihrer Steigung in diesem Punkt entspricht. Die Kurve wird daher mit steigendem positiven x immer steiler. Es gibt zwar auch Funktionen, die selbst e^x jenseits bestimmter Werte von x noch einholen, aber selbst in diesen steckt die Zahl e mit drin (siehe „Jenseits der e-Funktion").

Obwohl e also aus einem völlig anderen Zusammenhang kommt als die Kreiszahl π, gibt es da einige Gemeinsamkeiten. Wie π ist e eine irrationale Zahl, man kann sie also nicht als Verhältnis (lateinisch ratio) zweier ganzer Zahlen darstellen und daher auch nicht als ein Dezimalbruch mit endlich vielen oder periodisch wiederkehrenden Nachkommastellen. Wie π ist e sogar eine transzendente Zahl. Das Wort hat mit dem gleichlautenden philosophischen Begriff („die Grenzen möglicher Erfahrung übersteigend") insofern zu tun, als auch transzendente Zahlen negativ bestimmt sind als Zahlen, die nicht algebraisch sind, das heißt, als Lösungen von Gleichungen aufgefasst werden können, in denen sonst nur rationale Zahlen und ganzzahlige Exponenten vorkommen.

Noch unbekannt ist, ob e (ebenso wie π) normal ist – und das ist nun trotz des harmlosen Namens eine auf den ersten Blick etwas gruselige Eigenschaft. Normale Zahlen nennen Zahlentheoretiker jene, in deren unendlich vielen Nachkommastellen alle Ziffernblöcke einer gewissen Länge gleich oft vorkommen. Und alle heißt hier wirklich alle: Ihr Geburtsdatum, die Pin meiner EC-Karte, das Bitmuster auf einer DVD des Films „Avatar". Wenn die Eulersche Zahl normal ist, dann verbirgt sich in ihr all das – und alles andere, und das seit Anbeginn der Welt. Allerdings verbirgt es sich auch in unendlich vielen anderen Zahlen, so dass wir uns getrost auf die einmaligen Qualitäten von e beschränken können, wenn sie nachher feiern. Statt rundem Apfelkuchen sollte es dazu vielleicht eher ein gutes Bier geben, bei dem sich dann gleich etwas Exponentielles beobachten lässt (siehe „Wachstum und Verfall"). Und ein großer Geist, der heute Geburtstag hat, findet sich gewiss auch noch.

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Eine einfache Formel zur exakten Berechnung der Eulerschen Zahl e gibt es nicht. Das heißt, sie ist kein Resultat endlich vieler elementarer Rechenoperationen wie Addieren, Subtrahieren, Multiplizieren, Dividieren, Potenzieren oder Wurzelziehen. Ausgehend von ganzen Zahlen, kann man den wirklich exakten Wert von e nur in unendlich vielen Schritten berechnen – also praktisch gar nicht. Aber e lässt sich näherungsweise bestimmen – und bei entsprechendem Rechenaufwand wird die Näherung beliebig genau.

Für e gibt es aber mehrere Algorithmen oder Darstellungen. Die nebenstehende ist die auf den ersten Blick einleuchtendste, ergibt sich doch direkt aus der Interpretation von e als kontinuierlich mit 100 Prozent pro Jahr verzinstes Kapital (siehe Text links): Das Symbol „lim" besagt, dass e der Grenzwert (lateinisch limes) ist, dem der Ausdruck $(1 + 1/n)^n$ entgegenstrebt, wenn n gegen unendlich (∞) läuft. Für endliche n bekommt man einen Wert, der umso näher bei e liegt, je höher n ist. Allerdings nähert man sich der Eulerschen Zahl auf diese Weise recht langsam: Um zu sehen, dass am heutigen 7. Februar (2/7 in amerikanischer Schreibweise) e-day ist, muss man schon n = 74 setzen. Denn $(1 + 1/73)^{73}$ ist erst 2,69989 ...

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{1\cdot 1} + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \dots$$

Die beliebteste Darstellung der Eulerschen Zahl ist allerdings diese Summe. Das Zeichen ∑ (ein großes Sigma, das griechische „S") zeigt an, dass für alle Zahlen k von null bis unendlich die Brüche 1/k! aufaddiert werden sollen. Dabei ist k! (gesprochen „k Fakultät") eine Kurzschreibweise für das Produkt aller ganzen Zahlen von 1 bis k. Diese Vorschrift hat den Charme, dass man mit dem Addieren der Terme für immer größere k relativ bald aufhören kann und e damit trotzdem mit guter Genauigkeit angenähert hat. Um beispielsweise herauszufinden, dass heute e-day ist, reicht die Summe bis k = 4, denn die ist bereits 2,70833... Leonhard Euler im 18. Jahrhundert kannte die Zahl e bereits auf mehr als ein Dutzend Nachkommastellen genau, heute sind 200 Milliarden Stellen bekannt.

$$e = 2 + \cfrac{2}{2 + \cfrac{3}{3 + \cfrac{4}{4 + \cfrac{5}{\ddots}}}}$$

Wem seltsame Zeichen wie „lim" oder „∑" nicht geheuer sind, der freut sich vielleicht über eine Darstellung von e als sogenannten Kettenbruch. Sie wirkt auf den ersten Blick vertrauter, doch um die Unendlichkeit beziehungsweise um die Tatsache, dass sich der Zahlenwert für e in endlicher Zeit nur annähernd genau berechnen lässt, kommt man auch dabei nicht herum.

Als echten Bruch mit endlich vielen Bruchstrichen kann man die Zahl e nicht darstellen – sie ist, wie die Mathematiker sagen, irrational. Welche Nachkommastelle welche Ziffer hat, ist damit völlig unvorhersehbar und lässt sich nicht anders herausfinden als dadurch, dass man die Zahl bis zur gewünschten Näherung tatsächlich ausrechnet. Und trotzdem folgen die Zahlen in dem Kettenbruch einem regelmäßigen Muster – was aber nicht zu sehr verwundern darf, denn das tun die Zahlen in den Termen obiger unendlicher Summe ja auch.

Kettenbruchdarstellung für e gibt es in verschiedener Gestalt. Die links gezeigte kannte bereits Leonhard Euler, und auch damit kommt man relativ schnell zu passablen Näherungen von e. So kann man die e-day-Frage bereits klären, wenn man im nebenstehenden Bruch nur bis zum dritten Bruchstrich rechnet: 2 + 2/(2 + 3/(3 + 4/4)) = 2 + 8/11 = 2,727272...

$$2^x = e^{x \cdot \ln 2}$$

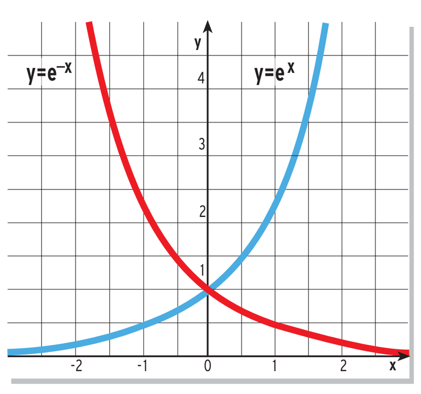
Irgendwas hoch x *lässt sich immer in eine Exponentialfunktion mit der Eulerschen Zahl e als Basis umformulieren. Das Wachsen eines Reiskornberges für x=0,1, 2, ... 63 stellt sich als e-Funktion dann so dar. Das Symbol „ln 2" ist der natürliche Logarithmus von 2; für ihn ist* $e^{\ln 2} = 2$.

Auf 64 Feldern in den Ruin

Es ist eine Legende, aber eine sehr schöne. Sie illustriert unsere Probleme, exponentielles Wachstum intuitiv einzuschätzen.
Ein orientalischer König wollte sich bei einem weisen Mann für die Erfindung des Schachspiels bedanken und versprach, ihm jeden Wunsch zu erfüllen. Der Weise wünschte sich, der König möge ihm für das erste Feld des Schachbrettes ein Reiskorn geben, für das zweite zwei, das dritte vier (= 2^2), das vierte acht (= 2^3)und so weiter bis zum 64. Feld, für das er also 2^{63} Körner erhalten sollte. Die sich dabei ergebende Reismenge solle dem Weisen als Lohn genügen.

Der bescheiden klingende Wunsch war in Wahrheit eine Unverschämtheit: Die exponentiell wachsenden Reisberge addieren sich zu $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{63}$, und das ergibt 1,84 mal 10^{19} Körner. Bei einem Korngewicht von 25 Milligramm sind das gut 461 Milliarden Tonnen. Bei 50 Körnern pro Kubikzentimeter ergeben sich damit fast 370 Kubikkilometer Reis – ein tausend Meter hoher Berg. Die Menge entspricht dem 670-fachen der Weltreisproduktion im Jahr 2008. So viel, wie der Mann verlangte, dürfte vom Anbeginn des Reisanbaus bis heute nicht erzeugt worden sein.

Wachstum und Verfall



Exponentialfunktionen sind überall, zumindest überall dort, wo eine Größe mit einer Rate wächst, die proportional zu ihrem aktuellen Wert ist. Ein typisches Beispiel wäre das zeitliche Wachstum einer Bakterienkultur: Je mehr sich teilende Bakterien, desto rascher wächst die Kultur. Allerdings sind Bakterien abzählbare Objekte, die jeweils eine gewisse Zeit brauchen, um sich zu teilen. Die glatte Exponentialkurve ist damit nur eine Näherung, die aber für eine hinreichend große Anzahl von Organismen die Verhältnisse sehr gut beschreibt.
Doch nicht nur Wachstum (blaue Kurve), auch hinter Abnahme und Verfall steckt sehr oft eine Exponentialfunktion (rot) – nur ist hier das Vorzeichen des Exponenten negativ. Analog zum exponentiellen Wachstum steckt dahinter ein proportionaler Zusammenhang von Zerfallsrate und Menge dessen, was zerfallen kann. Das klassische Beispiel hier ist die Radioaktivität: Die Atomkerne eines instabilen Isotops zerfallen alle mit der gleichen charakteristischen Wahrscheinlichkeit. Je weniger dieser Kerne in einer Probe übrig sind, desto weniger zerfallen pro Zeiteinheit. Daher folgt die Zerfallsrate einer e-Funktion mit negativem Exponenten.

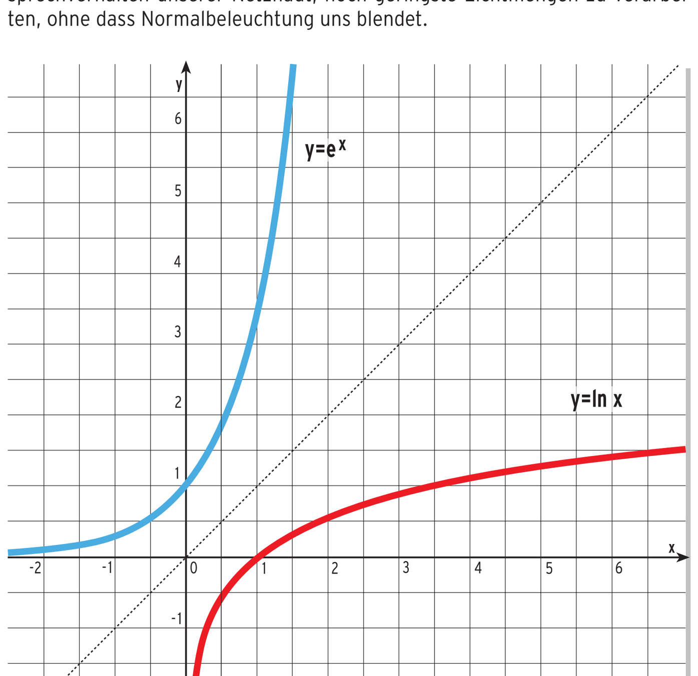
Gerade in physikalischen Zusammenhängen ist exponentielles Abnehmen sehr häufig. So fällt beispielsweise der Luftdruck der Erdatmosphäre mit steigender Höhe exponentiell ab – wobei die einfache Formel, die sogenannte „Barometrische Höhenformel", die Variation der Lufttemperatur mit der Höhe vernachlässigt. Ein anderes Beispiel ist uns vielleicht näher, und zeigt sich, wenn wir heute Abend mit schäumenden Getränken auf e anstoßen: Bierschaum zerfällt ebenfalls exponentiell.

Die Funktion der Sinne

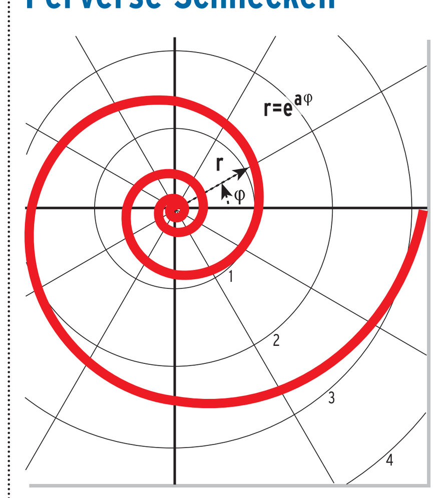
Zu einer Rechenoperation gibt es meist eine, die sie wieder rückgängig macht. So kann man Additionen durch Subtraktionen ungeschehen machen oder das Potenzieren durchs Wurzelziehen. Auch die Exponentialfunktion hat solch ein Gegenstück: den Logarithmus. Ist die Basis e, so schreibt man diese Operation als y = ln(x). Mathematisch nennt man das die Umkehrfunktion von $y = e^x$, denn es gilt $\ln(e^x) = x$. Ihre Kurve (rot) ergibt sich als Spiegelung der Exponentialkurve (blau) an der Diagonalen des Koordinatensystems (gestrichelt).

Das „ln" steht für „logarithmus naturalis". Tatsächlich ist diese Funktion in der Natur ähnlich ubiquitär wie die Exponentialfunktion – etwa bei der Quantifizierung menschlicher Sinneseindrücke. 1825 bemerkte Ernst Heinrich Weber, dass eine Empfindung nicht von der absoluten Stärke eines Reizes abhängt, sondern von deren relativer Änderung: Hält man ein Gewicht von 100 Gramm, merkt man es noch, wenn 4 Gramm hinzukommen. Hält man 200 Gramm, sind 4 Gramm extra nicht zu spüren, sondern erst 8 Gramm. Später erkannte Gustav Theodor Fechner, dass dies mathematisch auf den Logarithmus führt.

Das Weber-Fechner-Gesetz besagt, dass unsere Sinne den Logarithmus eines Reizes bilden, bevor sie ihn weiterverarbeiten. So müssen wir eine Schallquelle physikalisch um eine ganze Größenordnung aufdrehen, damit sie uns doppelt so laut erscheint. Das schützt das Gehör – um den Preis, dass wir in großem Getöse keine dynamischen Nuancen mehr wahrnehmen. Je kleiner aber der Reiz, desto sensibler werden wir oft, und so ermöglicht uns das logarithmische Ansprechverhalten unserer Netzhaut, noch geringste Lichtmengen zu verarbeiten, ohne dass Normalbeleuchtung uns blendet.



Perverse Schnecken



Diese Kurve fand der Mathematiker Jakob Bernoulli (1655 bis 1705) so schön, dass er sich wünschte, sie möge einmal seine Grabplatte zieren, zusammen mit dem Spruch „Eadem mutata resurgo" (Gewandelt und doch die Gleiche, kehre ich wieder"). Tatsächlich ist das genau das, was diese Kurve tut: Eine Streckung in radialer Richtung bewirkt dasselbe wie eine Drehung um den Mittelpunkt, ändert an der Form also kein bisschen.

Das ist deswegen so, weil die Kurve der Gleichung $r = e^{a\cdot\varphi}$ folgt (wobei der Parameter a im abgebildeten Fall zu etwa 0,176 gewählt wurde) – es ist also eine e-Funktion, nur in einem sogenannten Polarkoordinatensystem mit r als Abstand vom Zentrum und φ (sprich „phi") als Winkel gegen den Uhrzeigersinn bezüglich der Horizontalen. Da Summen im Exponenten aber nichts anderes sind als Produkte von e-Funktionen – also $e^{(\varphi+\theta)} = e^{\varphi} \cdot e^{\theta}$ – ist ein Drehen um den Winkel θ („theta") das Gleiche wie ein Strecken mit dem Faktor e^{θ}.

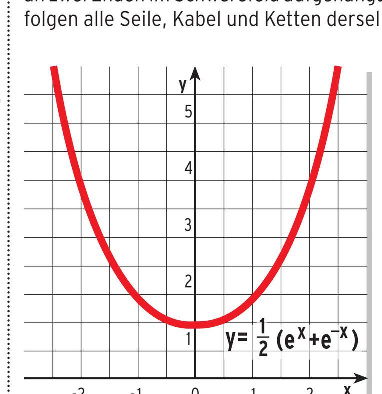
Diese Kurve heißt „logarithmische Spirale", denn zu Bernoullis Zeiten galt die e-Funktion noch nicht als eigenständige Funktion, und man arbeitete eher mit dem Logarithmus (siehe „Die Funktion der Sinne"). Logarithmische Spiralen sind in der Natur häufig: vom Tiefdruckgebiet im Satellitenbild bis zur Spiralgalaxie, und insbesondere bei Gehäusen von Weichtieren (kleines Bild rechts).

Schnecken einer Art haben in der Regel entweder linksdrehende Gehäuse (sie folgen der Gleichung $r = e^{a\cdot\varphi}$) oder rechtsdrehende ($r = e^{-a\cdot\varphi}$) – der jeweils andere Drehsinn kommt in der Art ähnlich selten vor wie ein Mensch, dem das Herz rechts sitzt. Nur bei wenigen Arten, etwa der auf Bali lebenden Schnecke *Amphidromus perversus,* kommen beide Formen in ähnlicher Häufigkeit vor.

Doch sind nicht alle Spiralen logarithmisch. In der Sphäre des Menschen dominiert eher die archimedische Spirale r = a·φ. Die Rille einer Schallplatte etwa hat diese Form, Lakritzschnecken oder wo sonst etwas aufgewickelt ist. Als Zierelement, das bereits auf mykenischen Fresken auftaucht, ist sie auch Steinmetzen geläufiger. Und das war Pech für Bernoulli. Als seine Witwe die Grabplatte in Auftrag gab, meißelte man ihm aus Versehen nicht die ersehnte logarithmische Spirale hinein, sondern eine schnöde archimedische.

Hängepartie

Hochspannungsleitungen, Wäscheleinen, Spinnfäden – alles, was hinreichend dünn, flexibel und an zwei Enden im Schwerefeld aufgehängt ist, hat in der Mitte einen Durchhänger. Tatsächlich folgen alle Seile, Kabel und Ketten derselben mathematischen Form – nur, welche ist das?



Jeder, dessen mathematisches Schulwissen noch nicht ganz verschütt gegangen ist, dürfte zunächst auf die Parabel tippen, also die Kurve der Funktion $y = x^2$. Er wäre damit in bester Gesellschaft, denn schon der große Galilei vermutete eben dies. Doch es stimmt nicht. Die tatsächliche Form ließ sich erst bestimmen, als die Infinitesimalrechnung entwickelt war – also die Mathematik mit unendlich kleinen Größen. Mit ihr lässt sich ableiten, dass die sogenannte „Kettenlinie" im Fall einer ideal biegsamen und in ihrer Länge unveränderlichen Schnur aus zwei Exponentialfunktionen zusammengesetzt ist: Sie wird von der Funktion $y = (e^x + e^{-x})/2$ bestimmt. Interessanterweise hängt dieses Resultat nicht von der Stärke der Schwerkraft ab – Ketten und Kabel hängen auf dem Mond in genau derselben Form durch wie auf der Erde.

Irgendwie ist die Kettenlinie die optimale Form für eine hängende Schnur – doch auch, wenn man die Kurve auf den Kopf stellt, bekommt man eine optimale Gestalt: Gewölbe, die solch einer Form folgen, müssen praktisch nur Druck, aber so gut wie keine Biegemomente aushalten und sind damit maximal stabil. Die Form wurde bereits von antiken Baumeistern genutzt – natürlich ohne dass ihnen die Formel dahinter bekannt war. Trotzdem bevorzugten die Römer bei ihren Gewölben oft den statisch nicht ganz so günstigen Halbkreis, vielleicht, weil die während des Aufmauerns gebrauchten Stützgerüste dafür einfacher zu bauen waren. Die größte Konstruktion dieser Art ist der 1965 vollendete „Gateway Arch" in St. Louis, Missouri. Er folgt einer umgedrehten Kettenlinie, deren Scheitel 192 Meter aufragt.

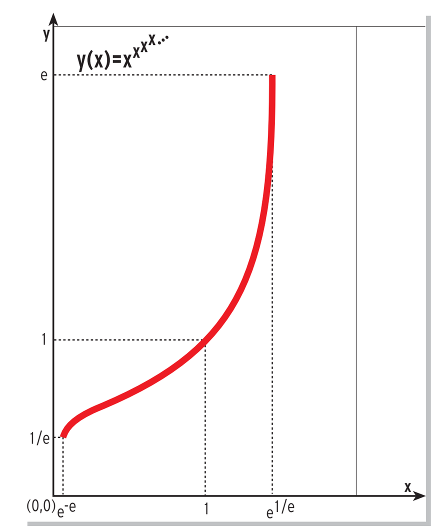
Jenseits der e-Funktion

Die Kurve von y = e^x steigt mit steigendem x schneller als die Parabel $y = x^2$, für genügend große x sogar schneller als jede Potenzfunktion $y = x^a$, ganz egal wie groß a ist. Dennoch gibt es Funktionen, deren Kurven sich noch steiler ins Unendliche recken als die der Exponentialfunktion. Eine solche überexponentielle Funktion ist zum Beispiel $y = x^x$, eine andere ist ein Gebilde, das die Mathematiker Gamma-Funktion nennen und das für natürliche Zahlen x die Fakultäten (x−1)! liefert, also die Produkte aller Zahlen von 1 bis x−1. Tatsächlich ist bereits Gamma(8) = 7! = 1·2·3·4·5·6·7 = 5040, während die e-Funktion hier lediglich auf $e^8 = 2980{,}95$... kommt. Für noch größere x hängt die Gamma-Funktion die Exponentialfunktion immer weiter ab.

Aber es geht noch extremer. So schlägt die Funktion y = e hoch e^x bei hinreichend großen Werten für x selbst die Gammafunktion. Noch wilder treibt es die Funktion y = x hoch x^x.

Dieses mehrfache Potenzieren einer Zahl mit sich selber sieht auf den ersten Blick ungewöhnlich aus, auf den zweiten erscheint es als zwanglose Fortsetzung vertrauter Rechenoperationen: Eine Multiplikation etwa ist ja nichts anderes als eine Kurzschreibweise für die mehrfache Addition einer Zahl zu sich selber. Genauso ist das Potenzieren ein mehrfaches Malnehmen einer Zahl mit sich selber. Warum die Sache also nicht weitertreiben und eine Zahl mehrfach mit sich selber potenzieren: a hoch a hoch a und so fort – das ganze b-1 mal. Tatsächlich schreiben die Mathematiker diese Operation ${}^{b}a$ (die Gesamtzahl der a wird also hochgestellt links angegeben, z. B. ${}^{2}a = a^a$) und nennen sie „Tetration" von griechisch „tettara" für „vier", weil sie nach Addition, Multiplikation und Potenz eine vierte Stufe der Verknüpfung zweier Zahlen darstellt.

Während man aber mit den ersten drei Stufen schon seit Jahrhunderten rechnet und kein



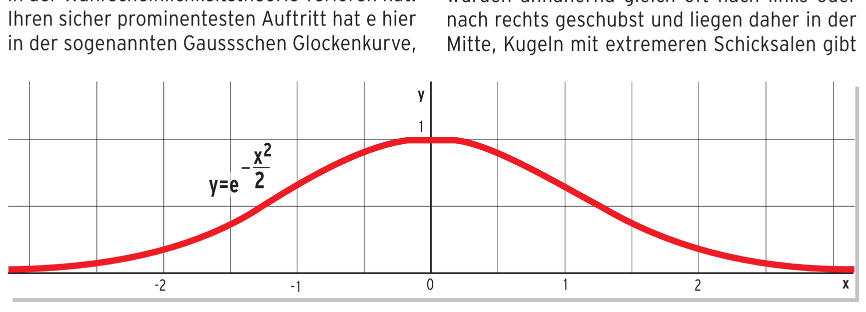
Schulkind um sie herumkommt, birgt die Tetration noch immer mathematisch unerforschtes Terrain. Der Grund: Addieren, Multiplizieren und Potenzieren kann man nicht nur natürliche Zahlen, sondern alle beliebigen reellen Zahlen – und sogar die sogenannten komplexen Zahlen (siehe „Hat e etwas mit π zu tun?"). Bei der Tetration ist das nicht so einfach: es ist bis heute nicht ganz klar, was etwa ein Ausdruck wie ${}^{\sqrt{b}}a$ eigentlich bedeuten soll.

Absonderlich an der Tetration ist aber noch etwas anderes: Während man beim unendlichen Addieren (x+x+x+...) oder Multiplizieren (x·x·x·...) endlicher Werte von x stets Unendliches erhält (bei x kleiner 1 im letzteren Fall etwas unendlich Kleines), liefert die Funktion y = x hoch x hoch x hoch x... auch bei Fortsetzung der Tetration ins Unendliche tatsächlich endliche große Zahlen, sofern x zwischen e^{-e} und $e^{1/e}$ liegt (siehe Grafik). Da wäre sie dann wieder, die Eulersche Zahl.

Gesetze für den Zufall

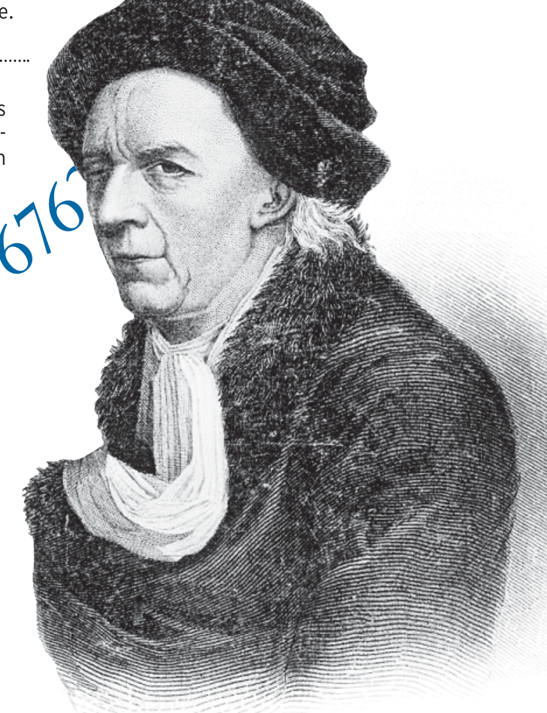
Zu den verblüffenden Tatsachen der Mathematik gehört, dass ein und dieselben Elemente zuweilen in ganz verschiedenen Zusammenhängen auftauchen, zwischen denen es keinen offensichtlichen Zusammenhang gibt. So fragt man sich doch, was die Eulersche Zahl und die Exponentialfunktion, die bei Wachstumsprozessen einen streng deterministischen Sinn hat, in der Wahrscheinlichkeitstheorie verloren hat. Ihren sicher prominentesten Auftritt hat e hier in der sogenannten Gaussschen Glockenkurve, die vielen Deutschen vielleicht noch von den alten 10-Mark-Scheinen erinnerlich ist. Sie zeigt, was zum Beispiel passiert, wenn Flipperkugeln ein schräges Brett mit lauter regelmäßig eingeschlagenen Nägeln herunterrollen: Tritt jede Kugel an derselben Stelle in den Nagelwald ein, wird aber bei jedem Nagel zufällig entweder links oder rechts vorbeigeleitet, dann häufen sich die unten auflaufenden Kugeln in Form einer Glockenkurve auf: Die meisten wurden annähernd gleich oft nach links oder nach rechts geschubst und liegen daher in der Mitte, Kugeln mit extremeren Schicksalen gibt es indes sukzessive weniger. Das Erstaunliche ist nun: Jede Überlagerung von hinreichend vielen voneinander gänzlich unabhängigen Zufallsereignissen führt zu so einer Glockenkurven-Verteilung, auch Normalverteilung genannt.

Allerdings folgt diese Normalverteilung eigentlich keiner wirklichen e-Funktion, sondern einer Kurve, für die e hoch minus x^2 genommen wird (siehe Grafik). Doch auch die Eulersche Zahl selber taucht in der Wahrscheinlichkeitstheorie auf. So kann man sich den Teilnehmer einer Lotterie vorstellen, bei der die Gewinnchance eins zu einer Million stehen. Der Mann glaubt, der Gewinn sei ihm sicher, wenn er einfach eine Million Mal spielt. Trotzdem gibt es eine Wahrscheinlichkeit, dass er dabei am Ende leer ausgeht. Sie nähert sich im Grenzwert unendlich kleiner Gewinnchancen und unendlich vieler Spiele dem Wert 1/e = 0,367..., also gut 37 Prozent.



2,718281828459045235360287471352662497757247093699959574966967

30353547594571382178525166427427466391932003059921817413596629043572900334295260595630738132328627943490763233829880753195251019011573834187930



Der Mann zur Zahl

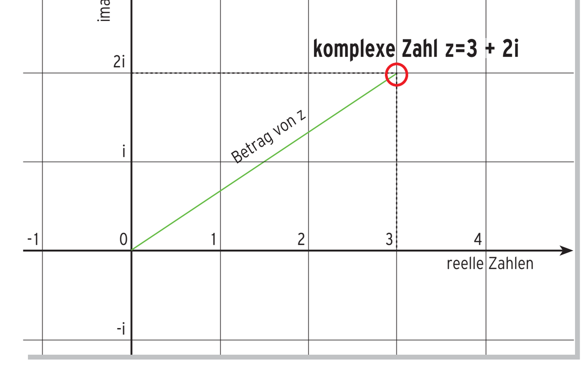
Leonhard Euler (1707 bis 1783) war der bedeutendste Mathematiker seiner Zeit. Allein, die Zahl, die seinen Namen trägt, hat nicht er entdeckt, sondern sein Schweizer Landsmann Jakob Bernoulli. Auf Euler geht aber das Symbol e zurück — wie auch sehr viele andere heute üblichen Notationen. Dass er e von Euler ableitete, gilt als sehr unwahrscheinlich.

Hat e etwas mit π zu tun?

Es hat, allerdings nur, wenn man den Zahlenraum erweitert: von den gewohnten reellen zu komplexen Zahlen.

Die Idee dahinter ist keineswegs komplex. Zahlraumerweiterungen erlebt man bereits in der Schule, etwa bei der Aufgabe „5 minus 8". Dann erweitert man den Zahlenstrahl nach links und entdeckt die negativen Zahlen. Auch zu den komplexen Zahlen führen zunächst unlösbare Aufgaben wie: Was ist Wurzel aus −4? Da die Wurzel die Umkehrung des Quadrierens ist, quadrierte reelle Zahlen aber stets positiv sind, scheint die Frage keine Antwort zu haben. Sie bekommt aber eine, sobald man die eindimensionale reelle Zahlenachse zu einer zweidimensionalen Ebene erweitert, in der Abstände von der reellen Achse in Einheiten einer Zahl i angegeben sind, deren Quadrat −1 ist. Die Zahl i und ihre Vielfachen heißen „imaginär", obwohl sie genauso wenig Einbildungen sind wie die reellen.

Komplexe Zahlen setzen sich nun aus je einer reellen und einer imaginären Komponente zusammen (Grafik oben) und mit ihnen kann man fast alle Operationen durchführen, die für rein reelle Zahlen funktionieren. Zu einer beliebigen komplexen Zahl z gibt es daher auch ein komplexes e^z. Diese Funktion verhält sich nun sehr merkwürdig, wie man sieht, wenn man ihren sogenannten Betrag für jedes z ausrechnet und ähnlich wie in einer Landkarte mit einem Farbwert versieht (Bild rechts): In Richtung der reellen Achse steigt die Funktion, wie gewohnt steil an. In imaginärer Richtung aber benimmt sie sich wie ein Wellenmuster, und eine halbe Welle hat genau die Länge π i: Addiert man zu z in e^z ein π i, wechselt der Funktionswert das Vorzeichen: $e^{z+\pi i} = e^z \cdot e^{\pi i} = -e^z$. Damit ist also $e^{\pi i} = -1$ oder, anders gesagt, $e^{\pi i} + 1 = 0$. Diese Gleichung, die mit 0, 1, i, e und π die fünf fundamentalsten Zahlen enthält, ist die wohl schönste Formel der Mathematik.



$$e^{\pi i} + 1 = 0$$

F.A.Z.-Grafik Karl-Heinz Döring / Fotos Blickwinkel; SZ-Photo