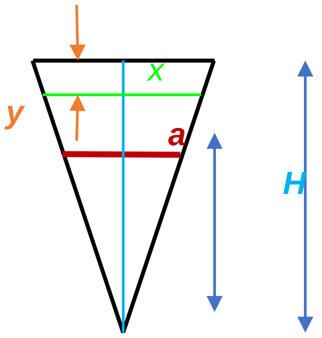
www.mathe-treff.de

Mathetreff: Lösungen der Knobelaufgaben für die Oberstufe

Aufgabe 1

Wasser in der Tüte

Zeichnet man durch den Körperhöhenfußpunkt parallel zu Grundkante A einen Schnitt des Körpers so erhält man:



Dreht man den Körper auf die Grundfläche, dann hat das Wasser die Höhe y und die Kantenlängen des entstehenden Pyramidenstumpfes sind *x* und *A*.
Nach dem Strahlensatz (2. Teil) gilt: $\frac{h}{a}=\frac{H}{A}$ (1) und $\frac{H-y}{x}=\frac{H}{A}$. (2).
Weiterhin gilt: für das Gesamtvolumen: $V_{\mathrm{PG}}=\frac{1}{3}A^2\cdot H$, bzw. wenn die quadratische Pyramide bis zur Höhe *h* gefüllt ist, $V_{\mathrm{Pk}}=\frac{1}{3}a^2\cdot h$. Dreht man den Körper herum, dann ist der Wasserstand *y* und *x* die obere Kantenlänge des Wassers, welche kleiner als *A* ist.
Dann gilt: $\frac{1}{3}a^2\cdot h=\frac{1}{3}A^2\cdot H-\frac{1}{3}x^2\cdot(H-y)$ bzw. $a^2\cdot h=A^2\cdot H-x^2\cdot(H-y)$.
Mit (1) gilt: $a=\frac{h\cdot A}{H}$ also $\frac{h^2\cdot A^2}{H^2}\cdot h=A^2\cdot H-x^2\cdot(H-y)$.
Mit (2) gilt $x=\frac{(H-y)\cdot A}{H}$, also $\frac{h^2\cdot A^2}{H^2}\cdot h=A^2\cdot H-\frac{(H-y)^2\cdot A^2}{H^2}\cdot(H-y)$

$$\Leftrightarrow \frac{h^3\cdot A^2}{H^2}=A^2\cdot H-\frac{(H-y)^3\cdot A^2}{H^2} \Leftrightarrow \frac{h^3}{H^2}=H-\frac{(H-y)^3}{H^2} \Leftrightarrow h^3=H^3-(H-y)^3$$

$$\Leftrightarrow (H-y)^3=H^3-h^3 \Leftrightarrow y=H-\sqrt[3]{H^3-h^3}$$

Die Wasserhöhe in der umgekehrten quadratischen Pyramide beträgt $y=H-\sqrt[3]{H^3-h^3}$.

Aufgabe 2

Geldscheine

Die Idee ist, wenn man durch eine bestimmte Geldmenge einen Euro erzeugen kann, kann man dann jeden beliebigen Betrag erzeugen. Durch geschicktes probieren erhält man, wenn der Käufer dem Verkäufer fünf 42 Euroscheine gibt und der Verkäufer dem Käufer 19 elf Euroscheine zurückgibt, hat der Käufer dem Verkäufer genau einen Euro bezahlt.
Zur Verdeutlichung, siehe untenstehende Tabelle.
Es ist dann auch klar, dass jeder Eurobetrag A so erzeugt werden kann, dass man A mal 5 42€ gibt und A mal 19 11€ Scheine wieder zurückgibt,
also A mal 210€ - A mal 209€ = A mal (210€-209€) = A mal 1€.

Käufer	Verkäufer Wechselgeld	Geldbetrag
5 mal 42€ = 210€	19 mal 11€ = 209€	210€ - 209€ = 1€
10 mal 42€ = 420€	38 mal 11€ = 418€	420€ - 418€ = 2€
15 mal 42€ = 630€	57 mal 11€ = 627€	630€ - 637€ =3€
…	…	…

Aufgabe 3

Dreieckskonstruktion mit Opa Gustav

Da es sich um ein rechtwinkliges Dreieck nach Aufgabenstellung handelt, liegt ohne Beschränkung der Allgemeinheit der rechte Winkel gegenüber der Seite $\overline{AB}$ = *c.*
Man zeichnet zuerst die Seite $\overline{AB}$ mit 8,0 cm. Anschließend errichtet man über der Seite $\overline{AB}$ den Thaleskreis. Damit ist gewährleistet, dass der Winkel gegenüber der Seite $\overline{AB}$ stets ein rechter Winkel ist. Danach konstruiert man eine Parallele p_{AB} zu $\overline{AB}$ mit einem Abstand zu $\overline{AB}$ von 3,5 cm. Dies nutzt die Eigenschaft der Höhe h_c aus. Diese Gerade p_{AB} schneidet die Kreislinie in zwei Punkten C_1 und C_2. Das Dreieck ABC_1 bzw. das kongruente Dreieck ABC_2 sind die Lösungen der Aufgabe. Mögliche Konstruktionsschritte kann man der nichtmaßstäblichen Skizze entnehmen.