www.mathe-treff.de

Mathetreff: Lösungen der Knobelaufgaben für die Oberstufe
April bis Juni 2019

Aufgabe 1

Das Würfelspiel

a) Wir suchen ein Ergebnis, bei dem alle drei Würfe zu Werten kleiner oder gleich 3 führen. Es muss jedoch zugleich mindestens einmal eine 3 vorkommen. Die 3 kann an drei verschiedenen Stellen vorkommen: als erster Wurf, als zweiter Wurf oder als dritter Wurf. Daraus ergeben sich die folgenden Möglichkeiten:

Möglichkeit 1: 3 – Zahl zwischen 1 und 3 – Zahl zwischen 1 und 3
Die Wahrscheinlichkeit dafür beträgt 1/6 mal ½ mal ½ = 1/24

Möglichkeit 2: Zahl zwischen 1 und 2 – 3 – Zahl zwischen 1 und 3
Zu beachten ist, dass der Fall 3 – 3 – Zahl zwischen 1 und 3 schon in Möglichkeit 1 enthalten ist.
Die Wahrscheinlichkeit für Möglichkeit 2 ist 1/3 mal 1/6 mal ½ gleich 1/36

Möglichkeit 3: Zahl zwischen 1 und 2 – Zahl zwischen 1 und 2 – 3
Zu beachten ist, dass alle Fälle mit Zahl zwischen 1 und 3 – 3 – 3 schon in den beiden vorherigen Möglichkeiten enthalten sind. Die Wahrscheinlichkeit für Möglichkeit 3 ist 1/3 mal 1/3 mal 1/6 gleich 1/54.

Insgesamt ergibt sich als Wahrscheinlichkeit 1/24 + 1/36 + 1/54 = 9/216 + 6/216 + 4/216 = 19/216.

b) Tim muss mindestens einen Wurf mit einem Wert von 4 oder mehr haben. Das Gegenereignis wäre, dass Tim nur Werte zwischen 1 und 3 erhält. Die Wahrscheinlichkeit dafür beträgt ½ mal ½ mal ½ gleich 1/8. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist dann gleich 1 – 1/8 = 7/8.

Aufgabe 2

Kalendersysteme

a) Der Unterschied zwischen den beiden Kalendersystemen beträgt im Moment 13 Tage. In allen durch 100 aber nicht durch 400 teilbaren Jahren vergrößert sich der Unterschied um einen Tag. Das bedeutet, dass er sich zuletzt im Jahre 1900 um einen Tag von zwölf auf 13 vergrößert hat. Wir müssen also vom 08. Februar 1810 zwölf Tage zurück gehen und erhalten den 27. Januar 1810 im julianischen Kalender.

b) Das nächste durch 100 aber nicht durch 400 teilbare Jahr wird das Jahr 2100 sein, der Unterschied wird im Jahre 2124 also 13 plus 1 gleich 14 Tage betragen. Vom 09. August 2124 müssen wir daher 14 Tage weiter gehen und erhalten den 23. August 2124 im gregorianischen Kalender.

c) Momentan beträgt der Unterschied 13 Tage. Wir suchen das Jahr, wo der Unterschied auf 365 Tage angewachsen sein wird. Dabei ist zu beachten, dass dann der gregorianische dem julianischen Kalender ein ganzes Jahr voraus sein wird. Eine Vergrößerung des Unterschieds um einen Tag erfolgt in Jahreszahlen der Form XXX00, wenn die Zahl nicht durch 400 teilbar ist. Mit anderen Worten: Der Unterschied wächst in jeweils 400 Jahren um drei Tage an. Dann wächst er in 4000 Jahren um 30 Tage und in 40.000 Jahren um 300 Tage an. Demnach müsste er in 46.800 Jahren um 351 Tage auf 364 Tage anwachsen. Der 16. März 48819 des gregorianischen Kalenders würde also dem 17. März 48818 des julianischen Kalenders entsprechen. Der Unterschied würde sich im Jahre

48.900 des julianischen Kalenders wieder um einen Tag vergrößern, also im Jahre 48.901 des gregorianischen Kalenders. Die Antwort ist also: Der 16. März des einen Kalenders würde dem 16. März des anderen Kalenders ab dem Jahr 48.901 des gregorianischen Kalenders wieder entsprechen.

Aufgabe 3

Kugeln

Die Mittelpunkte der vier unteren Kugeln bilden ein Quadrat der Kantenlänge 10 cm. Dieses Quadrat kann man mit Hilfe einer Diagonalen in zwei rechtwinklige Dreiecke einteilen, deren Katheten die Länge 10 cm haben und welche die Diagonale als ihre Hypotenuse haben. Nach dem Satz des Pythagoras gilt daher: $10^2 + 10^2 = d^2$ (wenn d für die Diagonale steht) bzw. $100 + 100 = d^2$ bzw. $d^2 = 200$ bzw. d = Quadratwurzel aus 200.

Die Mittelpunkte von zwei gegenüberliegenden Kugeln (deren Verbindung die Diagonale des Quadrats ist) und der Mittelpunkt der oberen Kugel bilden zusammen ein gleichschenkliges Dreieck. Dieses Dreieck hat als Basis die Diagonale des Quadrats und als Schenkel jeweils eine Verbindung zwischen zwei Mittelpunkten von sich berührenden Kugeln. Die Entfernung vom Mittelpunkt einer Kugel bis zum Berührpunkt mit der anderen Kugel muss aber gleich ihrem Radius sein. Die Schenkel müssen also 2 mal 5 cm gleich 10 cm lang sein.

Dieses Dreieck kann mit Hilfe der Höhe (die vom Mittelpunkt der oberen Kugel orthogonal zur Diagonalen verläuft) in zwei gleich große rechtwinklige Dreiecke eingeteilt werden, welche die halbe Diagonale und die Höhe als Katheten haben und jeweils einen der gleich langen Schenkel als Hypotenuse. Wir haben also zwei rechtwinklige Dreiecke, deren Katheten die Länge ½ mal Quadratwurzel aus 200 bzw. h haben. Ihre Hypotenuse hat jeweils die Länge 10 cm. Mit dem Satz des Pythagoras ergibt sich: $h^2 + 200$ durch $4 = 100$ bzw. $h^2 + 50 = 100$. Damit ergibt sich $h^2 = 50$ bzw. h gleich Quadratwurzel aus 50.

Die Entfernung des obersten Punktes der oberen Kugel zum Boden besteht aus der soeben benutzten Höhe und der Strecke von ihrem Mittelpunkt zum obersten Punkt und der Strecke von den Mittelpunkten der unteren Kugeln zum Boden. Die beiden zusätzlichen Strecken müssen jeweils dem Radius der Kugeln entsprechen, also 5 cm. Die gesuchte Entfernung ergibt sich also durch die Rechnung 5 cm + 5 cm + Quadratwurzel aus 50 cm gleich ungefähr 17,07 cm. Die Antwort ist also ungefähr 17,07 cm.